

國立臺中第二高級中學 _____年級_____班 姓名_____

座號 _____號

九十七學年度第二學期 2 年級 數學科 23 類組 第 1 次 期 中 考 試題

注意：未寫或未在規定位置填寫班級、姓名、座號者成績扣五分登記。

本試卷計 1 張共 2 面

一、單選題（每題 5 分）

- () 1. 自橢圓 $9x^2 + 25y^2 = 225$ 的其中一焦點 F_1 所發出之光再回到此焦點 F_1 時，所走路徑之長為多少？
(A)5 (B)10 (C)20 (D)25 (E)40 .
- () 2. 在坐標平面上，以 $(-1, 1)$ ， $(3, 1)$ 為焦點，且通過點 $(3, -2)$ 畫一雙曲線。試問此雙曲線必會通過下列哪一點？
(A) $(1, 1)$ (B) $(-1, 3)$ (C) $(-1, -4)$ (D) $(-1, 4)$ (E) $(3, 3)$.
- () 3. 在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度，已知此拋物線以過最高點的鉛垂線為對稱軸，現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬為 12 公尺，且距底部 $\frac{9}{4}$ 公尺高處其寬為 6 公尺，利用這些數據可推算出拱門的高度為多少公尺？
(A) $\frac{11}{4}$ (B) 3 (C) $\frac{13}{4}$ (D) $\frac{7}{2}$ (E) 4
- () 4. k 是一實數，若方程式 $y^2 - 2ky - kx^2 - 4kx + 5 = 0$ 之圖形為貫軸與 x 軸平行之雙曲線，則 k 之範圍為？
(A) $k > 5$ (B) $0 < k < 5$ (C) $-4 < k < 5$ (但 $k \neq 0$) (D) $k < 5$ (但 $k \neq 0$) (E) $k < -4$

二、多選題（每題 7 分，五個選項全部答對者得 7 分，只錯一個選項者可得 5 分，錯兩個選項者可得 3 分，錯三個或三個以上選項者不給分）

- () 1. 下列哪些選項中的資訊當作已知條件時，可以在坐標平面上求出唯一確定的方程式？
(A) 拋物線的頂點和焦點的坐標
(B) 橢圓中心坐標、長軸長度以及兩焦點距離
(C) 橢圓兩個焦點坐標及長軸的長度

- (D) 雙曲線的中心坐標和焦點的坐標以及其中一條漸近線的方程式
(E) 雙曲線的中心坐標和實軸長以及其中一條漸近線的方程式

- () 2. 在坐標平面上，下列敘述哪些是正確的？
(A) 若直線 L 與拋物線 Γ 恰交於一點，則稱 L 為 Γ 之切線
(B) 以拋物線的任一條切線為對稱軸，焦點的對稱點必在準線上
(C) 一雙曲線與 x 軸不相交時，必與 y 軸相交
(D) 以兩定點 A, B 為焦點的雙曲線，當兩頂點的距離愈大時，正焦弦就愈短
(E) 設 A, B 為平面上相異兩點，則滿足 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = 2\overline{AB}$ 的所有點 P 形成之圖形為一雙曲線。

- () 3. 以坐標原點為旋轉中心，將橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 反時針旋轉角度 θ (其中 $0^\circ < \theta < 90^\circ$) 得一新橢圓 Γ' ，則兩橢圓相交於四個點。今將此四點以坐標原點為中心，反時鐘順序依次連成一個四邊形 $ABCD$ ，請問下列哪些敘述為真？
(A) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (B) $\overline{AB} = \overline{CD}$ (C) $\angle BAD = \angle ABC$ (D) \overline{AC} 和 \overline{BD} 互相平分
(E) \overline{AC} 和 \overline{BD} 互相垂直

- () 4. 設直線 L 過 $A(1, 0, 0)$ ， $B(0, 0, 1)$ 二點，繞 Z 軸旋轉而得一錐面，則
(A) 平面 $z = 1$ 與錐面相交的曲線為一圓
(B) 平面 $y = 1$ 與錐面相交的曲線為一雙曲線
(C) 平面 $y + z = 1$ 與錐面相交成一拋物線
(D) 平面 $y + z = 2$ 與錐面相交成一拋物線
(E) 平面 $x + y + z = 1$ 與錐面相交成二相交直線

- () 5. 關於方程式 $\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$ 之幾何意義，下列何者正確？
(A) 此方程式所描述的圖形是一條開口朝下的拋物線
(B) 焦點為 $(-3, 1)$

(C) 直線 $x+y=2$ 是對稱軸

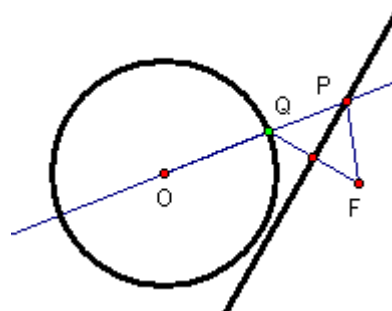
(D) 頂點 $(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$

(E) 正焦弦的長 $=10\sqrt{2}$

三、填充題 (每格 7 分)

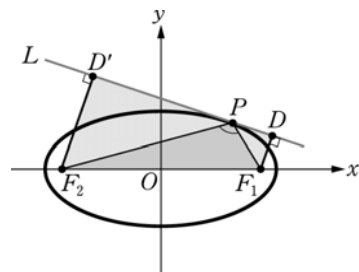
1. 改變 P 點在拋物線 $y^2=16x$ 上的位置，使得 P 點到焦點 F 與定點 A (8, 4) 之距離和 $\overline{PF} + \overline{PA}$ 值為最小，求 P 點的坐標為何？_____

2. 如圖，圓 O 的半徑為 6，圓心在原點，F 的坐標為 (10, 0)，Q 在圓 O 上，P 為 \overline{FQ} 的中垂線與直線 \overline{OQ} 的交點；當 Q 在圓 O 上移動時，動點 P 的軌跡方程式為_____。



3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 B, C 的坐標為 B (0, 3), C (0, -3)。若 AB 邊與 AC 邊之斜率乘積為定值 $\frac{1}{9}$ ，那麼頂點 A (x, y) 的軌跡的方程式為一圓錐曲線，試求其正焦弦長=_____。

4. 如圖，設 P 是橢圓 $\Gamma: x^2+4y^2=16$ 上一個點，L 是通過 P 點的切線，從焦點 F_1, F_2 分別作 L 的垂線，垂足依次為 D, D'，若 $\angle F_1PF_2=120^\circ$ ，試求：梯形 $F_1DD'F_2$ 與 $\triangle PF_1F_2$ 的面積比=_____。



5. 若橢圓： $\frac{x^2}{k^2+25} + \frac{y^2}{37-k} = 1$ 與雙曲線： $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{64} = 1$ 共焦點，則 $k=$ _____。

6. 設拋物線 G 之頂點 (0, 0)、焦點 F (1, 0)，一光線從點 A (5, 4) 射出，平行 G 的軸射在 G 上的 P 點，經反射後又射到 G 上的 Q 點，求過 Q 點之切線方程式_____。

7. 過 A (1, 3) 且與雙曲線 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 相切的直線方程式為_____ (有二解)

四、計算證明題

1. 描繪下列方程式的圖形且必須標示出頂點和焦點座標：
 $\sqrt{(x-5)^2+y^2} - \sqrt{(x+5)^2+y^2} = 8$ (8分)

2. (1) 試證：斜率為 m 且與橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切的切線方程式為 $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ (10分)

(2) 利用 (1) 之公式。試求與 $x+2y-4=0$ 垂直而且與 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{16} = 1$ 相切的直線方程式 (6分)

