用纸折椭圆、双曲线和抛物线

我们将一张纸片折叠一次，纸片上就会留下一条折痕，所得折痕是一条直线．如果在纸上折出很多很多折痕直线以后，纸上能显现出一条曲线的轮廓，使得该曲线和每一条折痕直线都相切，我们就说是“折出了”这条曲线．我们把一条曲线的所有切线组成的集合，叫做该曲线的切线族．因此，我们所说的“折出一条曲线”实际上就是指折出该曲线的切线族．

我们先来折椭圆．

取一个圆纸片，圆心为 O．在圆内取定一点 A．将圆片的边缘向圆内折叠，使圆片的边缘通过定点 A，或者说使圆片边缘上的一点 P 与定点 A 重合．每取一点 P 折一次就得一折痕(如图 1)．当点 P 在圆周上取得足够多且密时，所得的众多折痕就显现出一个椭圆的轮廓．它和所有的折痕直线都相切(见图 2)．

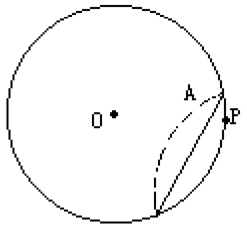

图1

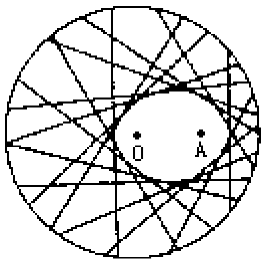

图2

这个椭圆以圆心 O 和定点 A 为它的两个焦点，已知圆的半径是它的长轴长．现在我们来证明，用上述方法折得的所有折痕，恰好组成该椭圆的切线族．

我们知道椭圆的焦点和切线有如下性质．

椭圆的焦点切线性质(图 3)：椭圆上任一点和两个焦点所连线段与椭圆在该点的切线构成相等的角；反之，若过椭圆上一点的直线使两个焦点在它的同侧，且它与该点和两个焦点所连线段构成相等的角，则该直线必为椭圆的切线．

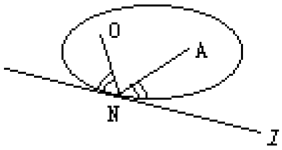

图3

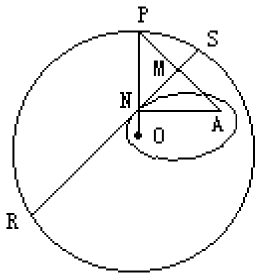

图4

先证依上法折出的每一条折痕都与上述椭圆相切，如图 4，设将圆周上一点 P 折到圆 O 内定点 A 所得折痕为 RS．于是 RS 垂直平分线段 AP．连 OP 交折痕 RS 于 N．连 AN，则 AN＝PN，于是 ON＋AN＝OP，即知点 N 在以 O，A 为焦点，长轴长为 OP 的椭圆上．又由∠RNO＝∠SNP＝∠SNA，根据椭圆的焦点切线性质，即证明折痕 RS 是上述椭圆(在点 N 处)的切线．

再证上述椭圆的每一条切线都可用上法折出．如图 4，设 RS 是椭圆在点 N 处的切线．连 ON，AN．则由椭圆的焦点切线性质得∠RNO＝∠SNA，延长 ON，与圆 O 交于 P，于是∠PNS＝∠ANS．再由 NO＋NA＝OP 得 NP＝NA．连 PA 交 RS 于 M，于是△PNM≌△ANM，得 MN 垂直平分线段 PA，即 RS 垂直平分线段 PA，即 RS 是把圆周上的点 P 折到圆内定点 A 所得的折痕．

把上述两方面合起来，我们就证明了折痕的集合恰是上述椭圆的切线的集合，也就是所有的折痕组成了椭圆的切线族，即我们折出了上述椭圆．

用类似的方法可以折出双曲线和抛物线．

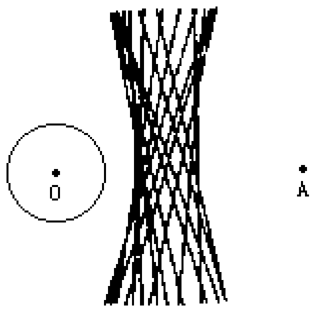

图5

在纸上画一个圆(圆心为 O)，在圆外取一定点 A，把点 A 分别折到圆周的不同点上，每折一次即在纸上得一折痕．当折叠的次数足够多．折痕足够密时，纸上就显现出一个双曲线的轮廓(见图 5)．该双曲线以圆心 O 和定点 A 为其焦点，其头轴长为已知圆 O 的半径．该双曲线与每一条折痕都相切．所有的折痕直线组成了双曲线的切线族．

取一矩形纸片，一个长边的中点为 F，对边长 a．将点 F 分别折到对边 a 的不同点上，每折一次就得到一条折痕，当折的次数足够多，折痕足够密时，纸上就显现出一条抛物线的轮廓(见图 6)，该抛物线以定点 A 为其焦点，定直线 a 为其准线．它与每一条折痕都相切．所有的折痕直线组成该抛物线的切线族．

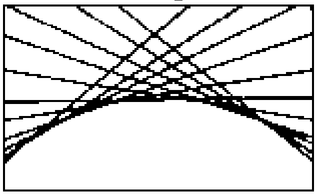

图6

上述两种折法的证明与折椭圆的证明类似，有兴趣的读者，不妨自己试一试(证明时需注意到，和椭圆的情形类似，双曲线和抛物线也有相应的焦点切线性质)，读者也可以在作者的小册子《解析几何方法漫谈》(河南科技出版社 1997 年出版)中找到所要的证明.

已知焦点 F 到准线 l 的距离等于 P，用直尺和圆规作出符合条件的抛物线.