

105 年 成功高中 每題都是 10 分

1. 請用兩種方法證明餘弦定理

2. 下列是學生常見解法，請分析學生的解法是否正確，如果正確請說明您還會強調什麼觀念，如果錯誤，哪邊有錯，正確方式該怎麼做？

(1) 方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 已知其中一根介於 1 到 2 之間，另外一根介於 -1 到 -2 之間，則 a 和 b 的範圍？

$$\text{學生作法：} \begin{cases} 1 < \alpha < 2 \\ -2 < \beta < -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 < \alpha + \beta < 1 \\ -4 < \alpha\beta < -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -4 < b < -1 \end{cases}$$

(2) 已知 $h(x) = x|x|$ ，試求出 $h(x)$ 在 $x=0$ 處的導數。

學生作法：令 $f(x) = x$ ， $g(x) = |x|$ 則 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

因為 $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ 但是此題 $g(x)$ 在 $x=0$ 不可微，

故 $h(x)$ 在 $x=0$ 不可微， $h'(0)$ 不存在。

3. 二項分配中隨機變數 X 的最大值為何？

4. 解三元一次聯立方程式
$$\begin{cases} x + 3y - z = 3 \dots (1) \\ 2x + 2y + z = 3 \dots (2) \text{ (我亂編的數據)} \\ 3x + y - 2z = 8 \dots (3) \end{cases}$$

學生作法：將第 (1) 式加第 (2) 式得到 $3x + 5y = 6 \dots (4)$

將第 (1) 式 $\times 2$ 減第 (3) 式得到 $-x + 5y = -2 \dots (5)$

將 (4)(5) 聯立解得 $x = 2$ 、 $y = 0$

帶入(1)式解得 $z = -1$

請問學生作法是否正確?如果正確，則每一步驟的幾何意義為何? 如果不正確，哪邊需要修改?

5. 一個圓錐曲線為 $x^2 - 12xy + y^2 = 40$

(1) 已知 A 為一矩陣且 $[x \quad y]A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 - 12xy + y^2 = 40$ 則 $A = ?$

(2) 有一正交矩陣 P (這邊忘得一乾二淨@@)

(3) 旋轉成沒有 xy 項.....

6.

7. 為了證明椎體體積是柱體體積的 $\frac{1}{3}$ 我們可以將一個正方體從對角線切開得到一個三角柱，再將三角柱切割成三個一樣的三角錐，請劃出此三角錐的展開圖並標示每個邊的長度。(題目給了正方體還有切開後三角柱的圖)

8. 一個正方體內有兩個相切的相等圓柱，其接觸面積為 V ，求出 V 是多少?

9. 設 A 為函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 圖形上異於反曲點的任意一點，並設以 A 為切點的切線交曲線 $f(x)$ 於另一點 B ，再以 B 為切點作切線交 $f(x)$ 另一點 C 。若 R 表示 $f(x)$ 與切線 AB 所圍成區域的面積，而 S 為 $f(x)$ 與切線 BC 所圍成區域的面積，則 S 、 R 有何關聯?。(此性質又稱為陳朱洪性質)