2016 第 67 屆 AMC12B 試題

俞克斌老師編寫

1. 當 $a=\frac{1}{2}$ 時，$\dfrac{2a^{-1}+\dfrac{a^{-1}}{2}}{a}$ 之值為何？
(A) 1　(B) 2　(C) $\frac{5}{2}$　(D) 10　(E) 20。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(D)

解：$a=\frac{1}{2}$，則 $a^{-1}=2$，故所求 $=\dfrac{2\times2+\dfrac{2}{2}}{\dfrac{1}{2}}=10$

2. 兩數的調和平均數等於它們乘積的兩倍除以它們的和，
請問 1 與 2016 的調和平均數最接近哪個整數？
(A) 2　(B) 45　(C) 504　(D) 1008　(E) 2015。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(A)

解：$\dfrac{2\times1\times2016}{1+2016}\approx\dfrac{2\times1\times2016}{2016}=2$

3. 令 $x=-2016$，則 $\left|\left||x|-x\right|-|x|\right|-x$ 之值為何？
(A) -2016　(B) 0　(C) 2016　(D) 4032　(E) 6048。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(D)

解：$\left|\left||-2016|+2016\right|-|-2016|\right|+2016=\left|\left|2016+2016\right|-2016\right|+2016=4032$

4. 若兩個銳角的度數比是 5：4，其中一個角的餘角是另一個角的餘角之 2 倍，
則此兩角的度數和為何？
(A) 75　(B) 90　(C) 135　(D) 150　(E) 270。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(C)

解：兩個銳角的度數分別是 $5t$ 度、$4t$ 度，
其中一個角的餘角 $(90-4t)$ 度是另一個角的餘角 $(90-5t)$ 度之 2 倍
故 $t=15$，則兩個銳角的度數分別是 75 度、60 度

5. 1812 年之戰始於西元 1812 年 6 月 18 日星期四的戰爭宣言，
在 919 天後，西元 1814 年 12 月 24 日簽定和平條約，而結束了這場戰爭。
請問簽約日是星期幾？
(A)星期五　(B)星期六　(C)星期日　(D)星期一　(E)星期二。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(B)

解：$919=7\times131+2$，故簽約日是星期 $4+2=6$

6. ΔABC 的三個頂點皆在拋物線 $y = x^2$ 上，頂點 A 在原點，邊 $\overline{BC}$ 平行於 x 軸。
若 ΔABC 的面積是 64 ，則 $\overline{BC}$ 的長是多少？
(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10　(E) 16 。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(C)

解：$B\left(t, t^2\right)$、$C\left(-t, t^2\right)$，則 ΔABC 的面積 $2t \times t^2 \times \dfrac{1}{2} = 64 \Rightarrow t = 4$，故 $\overline{BC} = 2t = 8$

7. 喬西寫下 1，2，3，……，99，100 的一列數字，他劃掉 1、跳過 2、劃掉 3，
如此繼續跳過與劃掉動作，直到數列的尾端。然後他回到剩下數列的開頭，
劃掉第一個剩下的數 2、跳過下一個數 4、劃掉 6、跳過 8、劃掉 10、直到尾端。
喬西以此方式繼續下去，直到只剩下一個數爲止。請問這個數是什麼？
(A) 13　(B) 32　(C) 56　(D) 64　(E) 96 。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(D)

解：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	5	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

第一輪刪除後剩餘 2 的倍數

	2		4		6		8		10
	12		14		16		18		20
	22		24		26		28		30
	32		34		36		38		40
	42		44		46		48		50
	52		54		56		58		60
	62		64		66		68		70
	72		74		76		78		80
	82		84		86		88		90
	92		94		96		98		100

第二輪刪除後剩餘 4 的倍數

			4				8		
	12				16				20
			24				28		
	32				36				40
			44				48		
	52				56				60
			64				68		
	72				76				80
			84				88		
	92				96				100

第三輪刪除後剩餘 8 的倍數

							8		
					16				
			24						
	32								40
							48		
					56				
			64						
	72								80
							88		
					96				

第四輪刪除後剩餘 16 的倍數

					16				
	32								
							48		
			64						
									80
					96				

第五輪刪除後剩餘 32 的倍數

	32								
			64						
					96				

第六輪刪除後剩餘 64 的倍數

			64						

8. 一塊密度均勻的木頭薄片，其形狀爲邊長3吋的等邊三角形，重量爲12 英兩。
另有一塊與第一塊薄片相同材質的木頭，厚度相同，形狀是邊長爲5吋的等邊三角形，則第二塊木頭薄片重量英兩數最接近於下面哪一個數？
(A) 14.0 (B) 16.0 (C) 20.0 (D) 33.3 (E) 55.6。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(D)

解：因爲厚度相同，故重量比等於面積比$\frac{x}{12}=\left(\frac{5}{3}\right)^2\Rightarrow x=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$

9. 卡爾有一個長方形花園。他用了20支圍籬柱子，花園的4個角隅處各放置1支柱子，其餘的柱子以4公尺等距安放在花園的周邊。若花園的較長邊包括角隅處之柱子數是較短邊包括角隅處之柱子數的2倍，則卡爾的花園面積爲若干平方公尺？
(A) 256 (B) 336 (C) 384 (D) 448 (E) 512。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(B)

解：$\begin{cases}2x+2y+4=20\\(x+2)=2(y+2)\end{cases}\Rightarrow x=6,y=2$，花園面積爲$[(6+1)\times4][(2+1)\times4]=336$

10. 某個四邊形的四個頂點分別是$P(a,b)$、$Q(b,a)$、$R(-a,-b)$與$S(-b,-a)$，其中a與b是整數且$a>b>0$。已知四邊形$PQRS$的面積爲16，則$a+b$之值爲何？
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 12 (E) 13。【2016 第 67 屆 AMC12B】

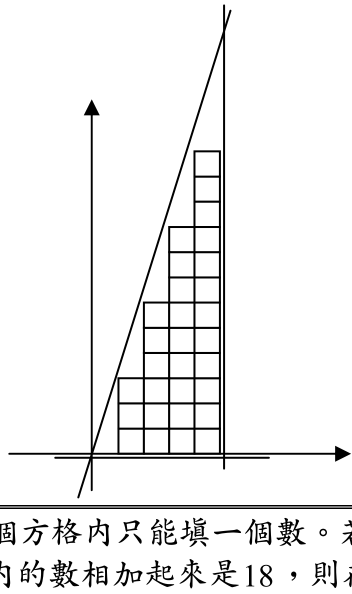
答：(A)

解：長方形$PQRS$的面積爲$4\times\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & b\\ b & a\end{vmatrix}=16\Rightarrow a^2-b^2=8\xrightarrow{a,b\in N}\begin{cases}a+b=4\\a-b=2\end{cases}$

11. 在直線$y=\pi x$、直線$y=-0.1$及直線$x=5.1$所圍成的區域內，四邊平行於坐標軸且頂點的坐標均爲整數的正方形有幾個？
(A) 30 (B) 41 (C) 45 (D) 50 (E) 57。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(D)

解：範圍內格子點如右圖
面積 1 平方單位的正方形有 30 個
面積 4 平方單位的正方形有 15 個
面積 9 平方單位的正方形有 5 個
所求正方形有 50 個



12. 將1，2，3，4，5，6，7，8，9填入3×3的方格中，每個方格內只能填一個數。若連續的兩數必須填入有共同邊的兩方格中，且四個角落方格內的數相加起來是18，則在中心方格內的數爲何？
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(C)

解：如圖

3	2	1
4	7	8
5	6	9

13. 愛麗絲與巴博的住所相距10哩。有一天，愛麗絲從她的住所向北看見一架飛機，同一時間，巴博從他的住所向西看見同一架飛機。愛麗絲看到飛機的仰角是30°，而巴博所看的仰角是60°，請問下面哪個哩數最接近飛機的高度？
(A)3.5哩 (B)4哩 (C)4.5哩 (D)5哩 (E)5.5哩。【2016第67屆AMC12B】

答：(E)

解：$\sqrt{\left(\sqrt{3}h\right)^2+\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\right)^2}=10\Rightarrow h=\sqrt{30}\approx 5.47\cdots$

14. 若一無窮等比級數之和是一正數S，且級數的第2項是1，則S的最小可能值爲何？
(A)$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (B)2 (C)$\sqrt{5}$ (D)3 (E)4。【2016第67屆AMC12B】

答：(E)

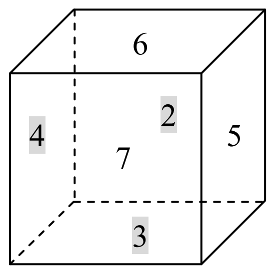
解：此無窮等比級數之和$S=a+1+\dfrac{1}{a}+\cdots=\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a}}=\dfrac{a^2}{a-1}\Rightarrow a^2-Sa+S=0$

其判別式爲$S^2-4S\geq 0\Rightarrow S\left(S-4\right)\geq 0\Rightarrow S\geq 4$或$S\leq 0$（不合）

15. 一正立方體的6個面分別寫上2，3，4，5，6，7等6個數。對這正立方體八個頂點的每一個頂點而言，將含有這個頂點的三個面的數相乘，總共得到八個乘積，試問這八個乘積所得的數其和的最大可能值爲何？
(A)312 (B)343 (C)625 (D)729 (E)1680。【2016第67屆AMC12B】

答：(D)

解：$7\times6\times5+7\times6\times4+7\times5\times3+7\times4\times3$
$+6\times5\times2+6\times4\times2+5\times3\times2+4\times3\times2$
$=210+168+105+84+60+48+30+24=729$



16. 將345寫成兩項或兩項以上連續正整數的遞增數列之和共有幾種方法？
(A)1 (B)3 (C)5 (D)6 (E)7。【2016第67屆AMC12B】

答：(E)

解：$345=3\times5\times23$

若拆爲「奇數個」，亦即$\left(2k+1\right)\times m=345$

則「等差中項m」可爲15、23、69、115，「對應個數$2k+1$」可爲23、15、5、3

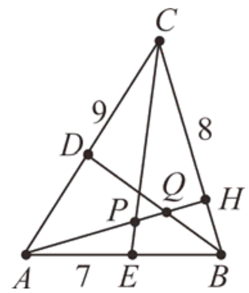
$\Rightarrow$可拆成$\begin{cases}3\text{項，等差中項爲}115\text{，最小正數爲}114\\5\text{項，等差中項爲}69\text{，最小正數爲}67\\15\text{項，等差中項爲}23\text{，最小正數爲}16\\23\text{項，等差中項爲}15\text{，最小正數爲}14\end{cases}$

若拆爲「偶數個」，亦即$\left(2k\right)\times\left(\dfrac{m+m+1}{2}\right)=345\Rightarrow k\left(2m+1\right)$，

則「等差中項$\dfrac{2m+1}{2}$」可為172.5、57.5、34.5，「對應個數$2k$」可為2、6、10

$\Rightarrow$可拆成$\begin{cases}2\text{項}，172+173\\6\text{項}，56+57+58+59\\10\text{項}，30+31+32+33+34+35+36+37+38+39\end{cases}$

17. 如圖所示，在ΔABC中，$\overline{AB}=7$、$\overline{BC}=8$、$\overline{CA}=9$，且$\overline{AH}$是高。D、E分別在$\overline{AC}$與$\overline{AB}$上，使得$\overline{BD}$與$\overline{CE}$分別為$\angle B$與$\angle C$的角平分線且分別交$\overline{AH}$於Q點與P點，試問$\overline{PQ}$之長為何？
(A)1　(B)$\dfrac{5}{8}\sqrt{3}$　(C)$\dfrac{4}{5}\sqrt{2}$
(D)$\dfrac{8}{15}\sqrt{5}$　(E)$\dfrac{6}{5}$。【2016第67屆AMC12B】



答：(D)

解：由「畢氏定理」知：$\overline{BH}=2$、$\overline{CH}=6$、$\overline{AH}=3\sqrt{5}$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PH}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CH}}\Rightarrow\frac{\overline{AP}}{\overline{PH}}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}，故\overline{HP}=\frac{2}{5}\overline{AH}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\overline{HQ}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{BA}}\Rightarrow\frac{\overline{HQ}}{\overline{AQ}}=\frac{2}{7}，故\overline{HQ}=\frac{2}{9}\overline{AH}=\frac{6\sqrt{5}}{9}$$

則$\overline{PQ}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}-\dfrac{6\sqrt{5}}{9}=\dfrac{8\sqrt{5}}{15}$

18. 方程式$x^2+y^2=|x|+|y|$之圖形所圍成區域之面積為何？
(A)$\pi+\sqrt{2}$　(B)$\pi+2$　(C)$\pi+2\sqrt{2}$　(D)$2\pi+\sqrt{2}$　(E)$2\pi+2\sqrt{2}$。
【2016第67屆AMC12B】

答：(B)

解：第一象限內$\Rightarrow x^2+y^2=x+y\Rightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

第一象限內區域面積為$\dfrac{1}{2}\times\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\times1^2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

全部四象限內區域面積為$=\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\times4=\pi+2$

19. 湯姆、迪克與哈利一起玩遊戲，每一個人同時分別重複投擲一枚公正的硬幣，直到出現正面為止。請問這三個人投擲相同次數的機率為何？
(A)$\dfrac{1}{8}$　(B)$\dfrac{1}{7}$　(C)$\dfrac{1}{6}$　(D)$\dfrac{1}{4}$　(E)$\dfrac{1}{3}$。【2016第67屆AMC12B】

答：(B)

解：$\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left[\frac{1}{2}\right]^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left[\frac{1}{2}\right]^3\left[\frac{1}{2}\right]^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=\dfrac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}$

20. 某區域的球隊進行循環賽，每一個球隊與其他每一球隊均比賽一次，比賽沒有平手且每一球隊都獲勝10場與失敗10場。試問其中有多少組的三球隊$\{A,B,C\}$滿足A打敗B，B打敗C，C打敗A？
(A)385 (B)665 (C)945 (D)1140 (E)1330。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(A)

解：既然每一隊都獲得 10 勝 10 敗，表示共有 21 隊參加。

任選 3 隊形成封閉群，有$C_3^{21}=1330$種

每一球隊都獲勝10場與失敗10場，則ABC與ADE封閉群中

「B勝A、C勝A」且「D負A、E負A」顯然不合循環勝負關係，有$21\times C_2^{10}=945$種

則符合循環勝負關係者有$1330-945=385$種

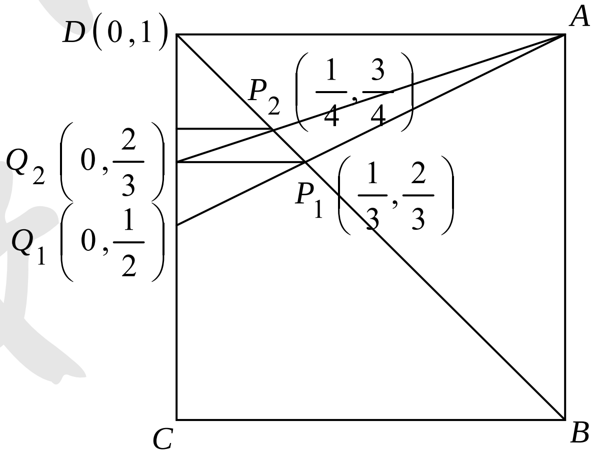
21. 已知$ABCD$是單位正方形，令Q_1爲$\overline{CD}$的中點。

對$i=1$，2，……，令P_i爲$\overline{AQ_i}$與$\overline{BD}$的交點，並令Q_{i+1}爲過P_i垂直於$\overline{CD}$的垂足。

請問$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\Delta DQ_iP_i$面積＝？

(A)$\frac{1}{6}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{1}{3}$ (D)$\frac{1}{2}$ (E)1。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(B)



解：$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\Delta DQ_iP_i$面積$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\times\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\\+\ldots\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}$$

22. 對某一個小於1000的正整數n，

$\frac{1}{n}$的十進位小數$0.\overline{abcdef}$是一個循環節長爲6的循環小數；

$\frac{1}{n+6}$的十進位小數$0.\overline{wxyz}$是一個循環節爲4的循環小數。

請問 n 落在哪個區間？
(A) $[1,200]$　(B) $[201,400]$　(C) $[401,600]$　(D) $[601,800]$　(E) $[801,999]$。
【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(B)

解：$\dfrac{1}{n}=\dfrac{abcdef}{999999}\Rightarrow n\,|\,999999=9\times3\times7\times11\times13\times37$

$\dfrac{1}{n+6}=\dfrac{wxyz}{9999}\Rightarrow n+6\,|\,9999=9\times11\times101$

選項只在 $1\sim999$ 範圍內，考慮 $n=297$

23. 在三維空間中，由不等式組 $|x|+|y|+|z|\le1$ 與 $|x|+|y|+|z-1|\le1$ 所決定區域的體積爲何？
(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}$　(E) 1。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(A)

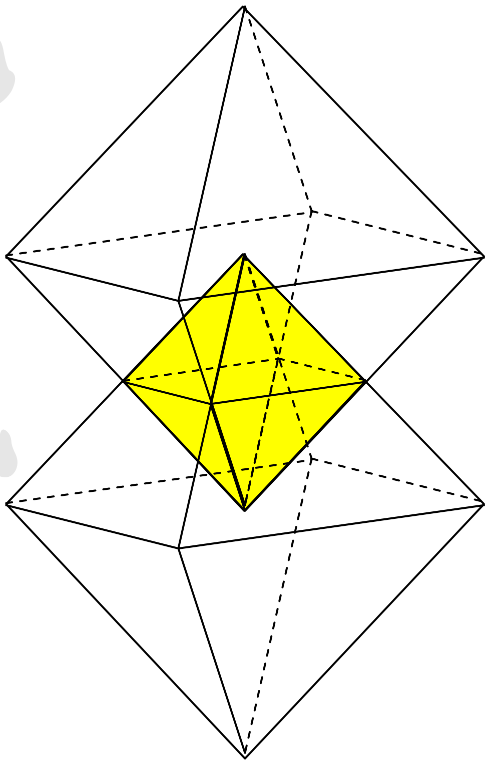
解：$|x|+|y|+|z|\le1$ 與 $|x|+|y|+|z-1|\le1$

均爲高爲 1、稜長爲 $\sqrt{2}$、

體積爲 $\left(\sqrt{2}\right)^2\times1\times\dfrac{1}{3}\times2=\dfrac{4}{3}$ 的正八面體

所求如圖所示，爲邊長爲 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$、

體積爲 $\dfrac{4}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{6}$ 的正八面體



24. 恰有 77,000 個有序四元組 $\{a,b,c,d\}$ 使得 $\gcd(a,b,c,d)=77$ 且 $lcm(a,b,c,d)=n$，請問 n 可能的最小值爲何？（註：$\gcd(a,b,c,d)$ 表 a，b，c，d 之最大公因數，而 $lcm(a,b,c,d)$ 表 a，b，c，d 之最小公倍數）
(A) 13,860　(B) 20,790　(C) 21,560　(D) 27,720　(E) 41,580。
【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(D)

解：$\gcd(a,b,c,d)=\gcd(77p,77q,77r,77s)=77\Rightarrow\gcd(p,q,r,s)=1$

考慮質數 α^k，p、q、r、s 至少一個含有 α^0，至少一個含有 α^k

當 p、q、r、s 僅由 α^0 與 α^k 構成時，有 $C_1^4+C_2^4+C_3^4=14$ 個組合

當 p、q、r、s 僅由 α^0 與 α^m 與 α^k，$0<m<k$，構成時，

有 $C_1^{k-1}C_1^3\times\dfrac{4!}{2!}=36(k-1)$ 個組合

當 p、q、r、s 由 α^0 與 α^n 與 α^m 與 α^k，$0<n<m<k$，構成時，

有 $C_1^4C_1^3\times C_2^{k-1}\times 2!=12(k-1)(k-2)$ 個組合

故組合總數 $=14+36(k-1)+12(k-1)(k-2)=14+12(k-1)^2$

$k=1$ 時，組合總數 14。$k=2$ 時，組合總數 50。$k=3$ 時，組合總數 110。

而且 $14\times50\times110=77000$，表示 $\ell cm(p,q,r,s)=\alpha^1\beta^2\gamma^3$，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 爲質數。

故 $lcm(a,b,c,d)=n$ 可能的最小值爲 $77\times2^3\times3^2\times5^1=27720$

25. 數列 $\{a_n\}$ 是由以下遞迴關係所定義：$a_0=1$，$a_1=\sqrt[19]{2}$，且 $a_n=a_{n-1}a_{n-2}^2$，$n\ge2$，試問使得乘積 $a_1a_2\cdots\cdots a_k$ 是整數的最小正整數 k 是多少？
(A)17 (B)18 (C)19 (D)20 (E)21。【2016 第 67 屆 AMC12B】

答：(A)

解：$a_n=a_{n-1}a_{n-2}^2$，$n\ge2$，$a_0=2^0$，

$a_1=2^{\frac{1}{19}}$，$a_2=2^{\frac{1}{19}}$，$a_3=2^{\frac{3}{19}}$，$a_4=2^{\frac{5}{19}}$，$a_5=2^{\frac{11}{19}}$，

$a_6=2^{1\frac{2}{19}}$，$a_7=2^{2\frac{5}{19}}$，$a_8=2^{4\frac{9}{19}}$，$a_9=2^9$，

$a_{10}=2^{17\frac{18}{19}}$，$a_{11}=2^{35\frac{18}{19}}$，$a_{12}=2^{71\frac{16}{19}}$，$a_{13}=2^{143\frac{14}{19}}$，$a_{14}=2^{287\frac{8}{19}}$，

$a_{15}=2^{574\frac{17}{19}}$，$a_{16}=2^{1149\frac{14}{19}}$，$a_{17}=2^{2299\frac{10}{19}}$，$a_{18}=2^{4599}$

其中 $a_ma_{m+9}=2^{\text{整數次方}}$

$(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8)a_9(a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17})=2^{\text{整數次方}}$

故最小正整數 k 是 17