2016 第 17 屆 AMC10B 試題

俞克斌老師編寫

1. 當 $a=\dfrac{1}{2}$ 時，$\dfrac{2a^{-1}+\dfrac{a^{-1}}{2}}{a}$ 之值為何？

(A) 1　(B) 2　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 10　(E) 20。　【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(D)

解：$a=\dfrac{1}{2}$，則 $a^{-1}=2$，故所求 $=\dfrac{2\times 2+\dfrac{2}{2}}{\dfrac{1}{2}}=10$

2. 若 $n\heartsuit m=n^3m^2$ 時，則 $\dfrac{2\heartsuit 4}{4\heartsuit 2}$ 之值為何？

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2　(E) 4。　【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(B)

解：$2\heartsuit 4=2^3 4^2=128$、$4\heartsuit 2=4^3 2^2=256$，則 $\dfrac{2\heartsuit 4}{4\heartsuit 2}=\dfrac{128}{256}=\dfrac{1}{2}$

3. 令 $x=-2016$，則 $\Big|\big||x|-x\big|-|x|\Big|-x$ 之值為何？

(A) -2016　(B) 0　(C) 2016　(D) 4032　(E) 6048。　【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(D)

解：$\Big|\big||-2016|+2016\big|-|-2016|\Big|+2016=\big||2016+2016|-2016\big|+2016=4032$

4. 柔伊閱讀 15 本書，一次閱讀 1 本。
她花了 1 天讀完第一本書，又花了 2 天讀完第二本書，再花了 3 天讀完第三本書，
其餘依此類推，即每讀完一本書要比讀完前一本書多花 1 天。
柔伊讀完第一本書是在星期一，讀完第二本書是在星期三，
若她每天都閱讀，則當她讀完第 15 本書時是在星期幾？

(A)星期日　(B)星期一　(C)星期三　(D)星期五　(E)星期六。　【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(B)

解：$2+3+\cdots+15=119=7\times 17$
讀完第一本書是在星期一，讀完第 15 本書時是在星期一

5. 阿曼達 4 個表兄弟的平均年齡是 8，年齡的中位數是 5，
則阿曼達的表兄弟中最年長者與最年輕者的年齡和為何？

(A) 13　(B) 16　(C) 19　(D) 22　(E) 25。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(D)

解：$\begin{cases} a<b<c<d \\ \dfrac{a+b+c+d}{4}=8 \\ \dfrac{b+c}{2}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<b<c<d \\ a+b+c+d=8 \\ b+c=10 \end{cases} \Rightarrow a+d=22$

6. 蘿拉把兩個三位正整數相加。若這兩個正整數的六個位數的數字都不相同，且蘿拉計算出來之和是一個三位數 S，則 S 的所有各位數字之和的最小可能值爲何？
(A)1 (B)4 (C)5 (D)15 (E)21。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(D)

解：這兩個三位數「最小」型如：102、345，其和「最小」爲 447

7. 若兩個銳角的度數比是 5 ： 4，其中一個角的餘角是另一個角的餘角之 2 倍，則此兩角的度數和爲何？
(A)75 (B)90 (C)135 (D)150 (E)270。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(C)

解：兩個銳角的度數分別是 $5t$ 度、$4t$ 度，
其中一個角的餘角 $(90-4t)$ 度是另一個角的餘角 $(90-5t)$ 度之 2 倍
故 $t=15$，則兩個銳角的度數分別是 75 度、60 度

8. 試問 $2015^{2016}-2017$ 的十位數之數字爲何？
(A)0 (B)1 (C)3 (D)5 (E)8。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(A)

解：15^1 末兩位爲 15、15^2 末兩位爲 25、15^3 末兩位爲 75、
15^4 末兩位爲 25、15^5 末兩位爲 75、
15^6 末兩位爲 25、15^7 末兩位爲 75、
……
15^{2016} 末兩位爲 25、
則 $2015^{2016}-2017$ 的十位數之數字，等同 $25-17$ 的十位數之數字，爲 0

9. ΔABC 的三個頂點皆在拋物線 $y=x^2$ 上，頂點 A 在原點，邊 $\overline{BC}$ 平行於 x 軸。若 ΔABC 的面積是 64，則 $\overline{BC}$ 的長是多少？
(A)4 (B)6 (C)8 (D)10 (E)16。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(C)

解：$B\left(t,t^2\right)$、$C\left(-t,t^2\right)$，則 ΔABC 的面積 $2t\times t^2\times\dfrac{1}{2}=64\Rightarrow t=4$，故 $\overline{BC}=2t=8$

10. 一塊密度均勻的木頭薄片，其形狀爲邊長 3 吋的等邊三角形，重量爲 12 英兩。另有一塊與第一塊薄片相同材質的木頭，厚度相同，形狀是邊長爲 5 吋的等邊三角形，則第二塊木頭薄片重量英兩數最接近於下面哪一個數？
(A)14.0 (B)16.0 (C)20.0 (D)33.3 (E)55.6。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(D)

解：因爲厚度相同，故重量比等於面積比 $\dfrac{x}{12}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow x=\dfrac{100}{3}=33\dfrac{1}{3}$

11. 卡爾有一個長方形花園。他用了20支圍籬柱子，
花園的4個角隅處各放置1支柱子，其餘的柱子以4公尺等距安放在花園的周邊。
若花園的較長邊包括角隅處之柱子數是較短邊包括角隅處之柱子數的2倍，
則卡爾的花園面積爲若干平方公尺？
(A) 256　(B) 336　(C) 384　(D) 448　(E) 512。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(B)

解：$\begin{cases} 2x+2y+4=20 \\ (x+2)=2(y+2) \end{cases} \Rightarrow x=6, y=2$，花園面積爲 $[(6+1)\times 4][(2+1)\times 4]=336$

12. 隨意從1、2、3、4、5五數中選出2個不同的數相乘，試問乘積爲偶數的機率是多少？
(A) 0.2　(B) 0.4　(C) 0.5　(D) 0.7　(E) 0.8。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(D)

解：$\underset{\text{全}}{1}-\underbrace{\dfrac{C_2^3}{C_2^5}}_{\text{乘積爲奇數的機率}}=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$

13. 波力士醫院在一年中多胞胎嬰兒出生數的統計如下：
雙胞胎、三胞胎及四胞胎共出生1000個嬰兒，
其中三胞胎之組數是四胞胎組數的4倍，雙胞胎組數是三胞胎組數的3倍，
則在此1000個嬰兒中四胞胎的嬰兒人數總共多少？
(A) 25　(B) 40　(C) 64　(D) 100　(E) 160。【2016 第 17 屆 AMC10B】

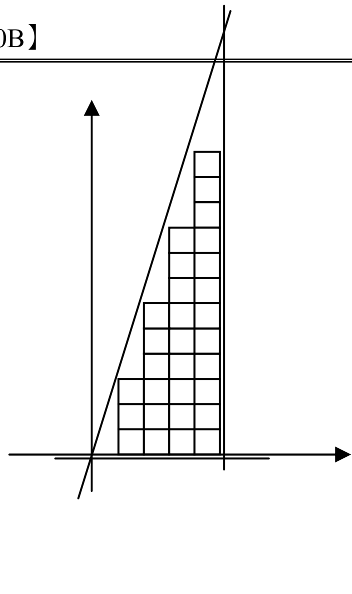
答：(A)

解：$\begin{cases} 2x+3y+4z=1000 \\ x=3y \\ y=4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=300 \\ y=100 \\ z=25 \end{cases}$

14. 在直線 $y=\pi x$、直線 $y=-0.1$ 及直線 $x=5.1$ 所圍成的區域內，
四邊平行於坐標軸且頂點的坐標均爲整數的正方形有幾個？
(A) 30　(B) 41　(C) 45　(D) 50　(E) 57。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(D)

解：範圍內格子點如右圖
面積 1 平方單位的正方形有 30 個
面積 4 平方單位的正方形有 15 個
面積 9 平方單位的正方形有 5 個
所求正方形有 50 個



15. 將1，2，3，4，5，6，7，8，9填入3×3的方格中，每個方格內只能填一個數。若連續的兩數必須填入有共同邊的兩方格中，且四個角落方格內的數相加起來是18，則在中心方格內的數爲何？
(A)5　(B)6　(C)7　(D)8　(E)9。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(C)

解：如圖

3	2	1
4	7	8
5	6	9

16. 若一無窮等比級數之和是一正數S，且級數的第2項是1，則S的最小可能值爲何？
(A)$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　(B)2　(C)$\sqrt{5}$　(D)3　(E)4。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(E)

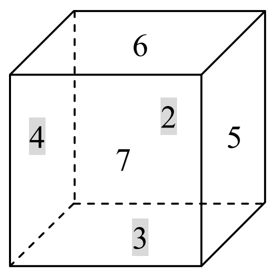
解：此無窮等比級數之和$S=a+1+\dfrac{1}{a}+\cdots=\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a}}=\dfrac{a^2}{a-1}\Rightarrow a^2-Sa+S=0$

其判別式爲$S^2-4S\geq 0\Rightarrow S\left(S-4\right)\geq 0\Rightarrow S\geq 4$或$S\leq 0$（不合）

17. 一正立方體的6個面分別寫上2，3，4，5，6，7等6個數。
對這正立方體八個頂點的每一個頂點而言，
將含有這個頂點的三個面的數相乘，總共得到八個乘積，
試問這八個乘積所得的數其和的最大可能值爲何？
(A)312　(B)343　(C)625　(D)729　(E)1680。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(D)

解：$7\times6\times5+7\times6\times4+7\times5\times3+7\times4\times3$
$+6\times5\times2+6\times4\times2+5\times3\times2+4\times3\times2$
$=210+168+105+84+60+48+30+24=729$



18. 將345寫成兩項或兩項以上連續正整數的遞增數列之和共有幾種方法？
(A)1　(B)3　(C)5　(D)6　(E)7。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(E)

解：$345=3\times5\times23$
若拆爲「奇數個」，亦即$\left(2k+1\right)\times m=345$
則「等差中項m」可爲 15、23、69、115，「對應個數$2k+1$」可爲 23、15、5、3

$$\Rightarrow\text{可拆成}\begin{cases}3\text{項，等差中項爲}115\text{，最小正數爲}114\\5\text{項，等差中項爲}69\text{，最小正數爲}67\\15\text{項，等差中項爲}23\text{，最小正數爲}16\\23\text{項，等差中項爲}15\text{，最小正數爲}14\end{cases}$$

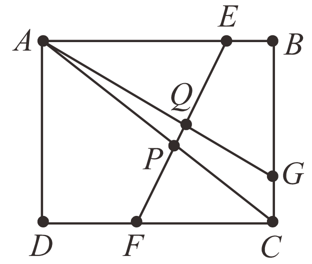
若拆爲「偶數個」，亦即$\left(2k\right)\times\left(\dfrac{m+m+1}{2}\right)=345\Rightarrow k\left(2m+1\right)$，

則「等差中項$\dfrac{2m+1}{2}$」可為172.5、57.5、34.5，「對應個數$2k$」可為2、6、10

$$\Rightarrow \text{可拆成}\begin{cases} 2\text{項，}172+173 \\ 6\text{項，}56+57+58+59 \\ 10\text{項，}30+31+32+33+34+35+36+37+38+39 \end{cases}$$

19. 長方形$ABCD$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=4$。點E在$\overline{AB}$邊上且$\overline{EB}=1$，點G在$\overline{BC}$上且$\overline{CG}=1$，點F在$\overline{CD}$上且$\overline{DF}=2$。若線段$\overline{AG}$及$\overline{AC}$分別交$\overline{EF}$於Q及P，則$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{EF}}$之值為何？

(A)$\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ (B)$\dfrac{\sqrt{2}}{13}$ (C)$\dfrac{9}{82}$ (D)$\dfrac{10}{91}$ (E)$\dfrac{1}{9}$。



【2016第17屆AMC10B】

答：(D)

解：$\overleftrightarrow{AC}$：$4x+5y=20$

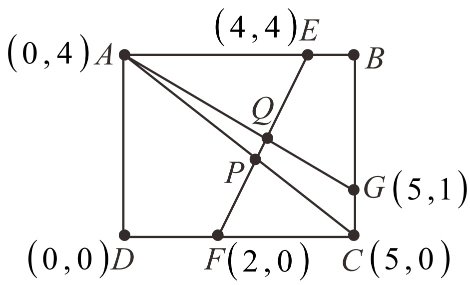
$\overleftrightarrow{AG}$：$3x+5y=20$

$\overleftrightarrow{EF}$：$2x-y=4$

$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{EF}$交於$P\left(\dfrac{40}{14},\dfrac{24}{14}\right)$

$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{EF}$交於$P\left(\dfrac{40}{13},\dfrac{28}{13}\right)$

則$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{EF}}$之值為$\dfrac{\dfrac{40}{13}-\dfrac{40}{14}}{4-2}=\dfrac{10}{91}$



20. 平面上以一點為固定點而將其他點按一定比例向外擴散稱為一個「擴變」，現以一定點為起點將圓心在$A(2,2)$，半徑為2的圓，擴變到圓心在$A'(5,6)$，半徑為3之圓，則在此變換下，原點$O(0,0)$與其擴變後的點之距離為何？

(A)0 (B)3 (C)$\sqrt{13}$ (D)4 (E)5。【2016第17屆AMC10B】

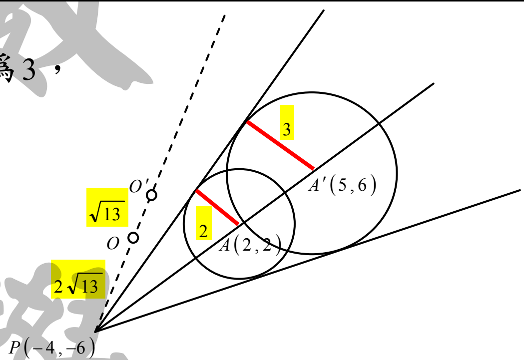
答：(C)

解：$A(2,2)$，半徑為2。$A'(5,6)$，半徑為3，

故擴變點為$P(-4,-6)$，$\overline{PO}=2\sqrt{13}$

則$O(0,0)$與其擴變後的點之距離

為$\overline{OO'}=\dfrac{1}{2}\overline{PO}=\sqrt{13}$



21. 方程式$x^2+y^2=|x|+|y|$之圖形所圍成區域之面積為何？

(A)$\pi+\sqrt{2}$ (B)$\pi+2$ (C)$\pi+2\sqrt{2}$ (D)$2\pi+\sqrt{2}$ (E)$2\pi+2\sqrt{2}$。

【2016第17屆AMC10B】

$\boxed{答}$：(B)

$\boxed{解}$：第一象限內$\Rightarrow x^2+y^2=x+y\Rightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

第一象限內區域面積爲$\dfrac{1}{2}\times\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\times1^2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

全部四象限內區域面積爲$=\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\times4=\pi+2$

22. 某區域的球隊進行循環賽，每一個球隊與其他每一球隊均比賽一次，
比賽沒有平手且每一球隊都獲勝10場與失敗10場。
試問其中有多少組的三球隊$\{A,B,C\}$滿足A打敗B，B打敗C，C打敗A？
(A)385 (B)665 (C)945 (D)1140 (E)1330。【2016 第 17 屆 AMC10B】

$\boxed{答}$：(A)

$\boxed{解}$：既然每一隊都獲得 10 勝 10 敗，表示共有 21 隊參加。

任選 3 隊形成封閉群，有$C_3^{21}=1330$種

每一球隊都獲勝10場與失敗10場，則ABC與ADE封閉群中

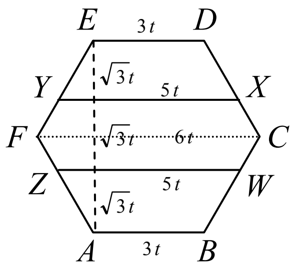
「B勝A、C勝A」且「D負A、E負A」顯然不合循環勝負關係，有$21\times C_2^{10}=945$種

則符合循環勝負關係者有$1330-945=385$種

23. 在正六邊形$ABCDEF$的邊$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$及$\overline{FA}$上分別選取點W、X、Y及Z使得$\overline{AB}$、$\overline{ZW}$、$\overline{YX}$及$\overline{ED}$互相平行且等距離，則六邊形$WCXYFZ$面積與六邊形$ABCDEF$面積的比值爲何？
(A)$\dfrac{1}{3}$ (B)$\dfrac{10}{27}$ (C)$\dfrac{11}{27}$ (D)$\dfrac{4}{9}$ (E)$\dfrac{13}{27}$。【2016 第 17 屆 AMC10B】

$\boxed{答}$：(C)

$\boxed{解}$：六邊形$WCXYFZ$面積爲$\left[(5t+6t)\times\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\times\dfrac{1}{2}\right]\times2=\dfrac{11\sqrt{3}t^2}{2}$



六邊形$ABCDEF$面積爲$\left[(3t+6t)\times\dfrac{3\sqrt{3}t}{2}\times\dfrac{1}{2}\right]\times2=\dfrac{27\sqrt{3}t^2}{2}$

故兩者比值爲$\dfrac{11}{27}$

24. 在四位正整數$abcd$中，其中$a\neq0$，
具有3個二位整數$ab<bc<cd$的性質而形成一遞增等差數列，
請問這種四位數有幾個？（如4692即$a=4$，$b=6$，$c=9$，$d=2$具有此性質）
(A)9 (B)15 (C)16 (D)17 (E)20。【2016 第 17 屆 AMC10B】

$\boxed{答}$：(D)

$\boxed{解}$：依題意$10a+b+10c+d=2(10b+c)\Rightarrow10(a-2b+c)=-b+2c-d$

又$0<a\le b\le c<10$，且$d\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

則$-b+2c-d=0$或 10，亦即$a-2b+c=0$或 1

(1) 當 $a-2b+c=0$，亦即 $a+c=2b$，表示 a，b，c 成等差

此時對應 $-b+2c-d=0$，亦即 $b+d=2c$，表示 b，c，d 成等差

故 a，b，c，d 成等差，所求爲 1234、2345、3456、4567、5678、6789

或爲 1357、2468、3579

(2) 當 $a-2b+c=1$

- $c=9\Rightarrow a=2b-8$
  - $a=2\Rightarrow b=5\Rightarrow d=3\Rightarrow$ $\boxed{2593}$
  - $a=4\Rightarrow b=6\Rightarrow d=2\Rightarrow$ $\boxed{4692}$
  - $a=6\Rightarrow b=7\Rightarrow d=1\Rightarrow$ $\boxed{6791}$
  - $a=8\Rightarrow b=8\Rightarrow d=0\Rightarrow$ $\boxed{8890}$
- $c=8\Rightarrow a=2b-7$
  - $a=1\Rightarrow b=4\Rightarrow d=2\Rightarrow$ $\boxed{1482}$
  - $a=3\Rightarrow b=5\Rightarrow d=1\Rightarrow$ $\boxed{3581}$
  - $a=5\Rightarrow b=7\Rightarrow d=1\Rightarrow$ $\boxed{6791}$
- $c=7\Rightarrow a=2b-6$
  - $a=2\Rightarrow b=4\Rightarrow d=0\Rightarrow$ $\boxed{2470}$

25. 令 $f(x)=\sum\limits_{k=2}^{10}\left([kx]-k[x]\right)$，式中 $[r]$ 表示小於或等於 r 的最大整數。

則當 $x\ge 0$ 時，$f(x)$ 有多少個相異的值？

(A) 32 (B) 36 (C) 45 (D) 46 (E) 無限多。【2016 第 17 屆 AMC10B】

答：(A)

解：令 $x=[x]+m$，$0\le m<1$

則 $kx=k[x]+km \Rightarrow [kx]=[k[x]+km]=k[x]+[km]$

故 $[kx]-k[x]=k[x]+[km]-k[x]=[km]$

則 $f(x)=\sum\limits_{k=2}^{10}\left([kx]-k[x]\right)=\sum\limits_{k=2}^{10}[km]$

而可使數列 $\langle [km]\rangle\in Z$ 的不重複 m 值，有

0、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{5}{6}$、

$\frac{1}{7}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{5}{7}$、$\frac{6}{7}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{5}{8}$、$\frac{7}{8}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{2}{9}$、

$\frac{4}{9}$、$\frac{5}{9}$、$\frac{7}{9}$、$\frac{8}{9}$、$\frac{1}{10}$、$\frac{3}{10}$、$\frac{7}{10}$、$\frac{9}{10}$，共 32 種