# 國立陽明高中 97學年度 數學科 第一次教師甄試 試題

一、填充題(每題5分，共60分)

1. $\Delta ABC$中，$\overline{BC}=2, \angle B+\angle C=60^\circ$，求$\Delta ABC$面積的最大值=________

2. $y=|x|(x-4)-x-m$的圖形與 x 軸交於相異 3 點，求$m$值範圍？________

3. 已知$\Delta ABC$為正三角形且點 A、B、C 皆落在邊長為1的正六邊形的邊上，若點 A 將其所在的邊分成長度為 1：2 的兩段， 求$\overline{AB}^2$之值 ________

4. 連續擲一公正骰子兩次，設第一次出現點數為$x$，第二次出現點數為$y$，且$P_n$ 代表$|x-n|+|y-n|\le n$的機率，則$P_n$的最大值=______

5. 設上樓梯可一步跨一階或二階，但不可連續兩步(或兩步以上)皆跨二階，今有一15階的樓梯，有多少種上樓的方法？________

6. 設$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，若$m$為自然數且$A^m=I$，求$m$的最小值。________

7. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{2}}$ =________

8. 設$f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ （$\alpha,\beta$為實數，$0\le\alpha\le\beta$），且$\int_{-1}^{1}f(x)dx=1$，令 $S=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$ ，求 S 的最大值。 ________

9. 設 P、Q 為拋物線 y=$x^2$上相異兩點， h 為$\overline{PQ}$中點的 y 坐標。若$\overline{PQ}$的長度為 L，直線 PQ 的斜率為 m，試求 h (以 L 和 m 表示出來)。_______

10. 在空間中，設直線 L 過點 (3,4,0)且與向量$\overrightarrow{a}$=(1,1,1)平行，直線 M 過點(2,-1,0)且與向量$\overrightarrow{b}$=(1,-2,0)平行，又點 P 為直線 L 上之動點，點 Q 為直線 M 上之動點，求$\overline{PQ}$

長度之最小值。_______

11. 設 p 為大於 3 質數，$a,b,c,d$ 為整數，滿足
$a+b+c+d=0, ad-bc+p=0, a\ge b\ge c\ge d$，試求 $a=$_______(以 p 表示)

12. 平面上 $\Delta ABC$，已知 D,E 分別在 $\overline{AB},\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AD}:\overline{BD}=4:3$， $\overline{BE}:\overline{EC}=1:2$，

設 $\overline{AE}$ 和 $\overline{CD}$ 交於點 O，若點 O 為 $\Delta ABC$ 的外心，求 $\overline{AB}^2:\overline{BC}^2:\overline{CA}^2$ =_________

## 二、問答與計算題:(共 40 分)

$\boxed{\text{甲}}$: 每小題 6 分

(1) 試在下列的計算式中，指出第幾個等號錯誤並說明原因:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times......\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n}\right)\times......\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$
$$=1\times1\times1\times......\times0\times0=0$$

(2) 兩個多項式相除，若除式是一次式(x-c)，有一種演算方法叫綜合除法。

請以三次式($a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$)除以(x-c)的商式為($b_2x^2+b_1x+b_0$)，餘式為 $r$ ，

說明綜合除法的演算(操作)方法(以學生為對象)。

(3) 試證明輾轉相除法原理：
設 a，b∈N，b≠0，若 a=bq+r　( 0≦r＜b，q∈N)　，則(a，b)=(b，r)
( 其中(a，b)表 a 與 b 的最大公因數)

(4) 設實係數二元二次方程式為 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\,(b\neq0)$，
將坐標軸以原點 O 為中心，旋轉一銳角 $\theta$ ，可得新方程式為
$Ax'^2+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0$ (沒有 $x'y'$ 項)，

其中 $A-C=\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}$ ，而正負符號則依 b 的正負而定。

試說明為何正負符號是依 b 的正負而定?

$\boxed{\text{乙}}$: 共 9 分

(1) 兩歪斜線在一平面上之正射影可能有那些情形?

(2) 證明兩直線 $L_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ 與 $L_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{1-z}{-2}$ 為歪斜線

(3) 續(2)，試求過點(-2,1,2)與 $L_1$ ， $L_2$ 均相交之直線方程式

$\boxed{丙}$ :設一籃球選手經常做罰球線投籃練習，當他投進一球後，則下一球的命中率為 0.6，當他有一球投不進後，則下一球的命中率為 0.4，如果他第一球投進了，試求第 n 球投進的機率為何?(以 n 表之) (7 分)