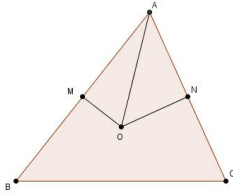


97 年文華高中教師甄試筆試試題。均為計算證明題，每題 7 分，作答時間：120 分鐘

1、 $a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots 2n}$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

2、已知 $A(2,0), B(-2,4), C(6,5), P(x,y)$ 且 $|\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}| = 6$ 。 $k = 2x - y + 1$ ，求 (x,y) 使得 k 有最大值。

3、 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6, \overline{AC} = 8, \overline{BC} = 2\sqrt{13}$ ， O 為外接圓圓心，若 $\overline{AO} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ，試求 (x,y) 。



4、 $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ ， $B = \sum_{n=1}^{99} A^n$ ，求 B^{-1} 。

5、一橢圓方程式： $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0$ ，求焦點座標。

6、已知 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ， $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2$ ， $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3$ ，求 $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = ?$

7、已知 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$ ，試證明： $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 12 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ 。

8、試求方程式 $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 的五個根在複數平面所構成的五邊形面積。

9、由 0,1,1,2,2,3,3,3,4 組成的四位數，共有多少種可能。

10、袋中有紅球 5 顆，白球 3 顆，黑球 4 顆，每顆球被取到的機率相等，且取出後不放回，連續取球，黑球先取完的機率為何？

11、計算 $\log_4(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 45^\circ)$ 之值。

12、 $\forall x \in R, k \cos^2 x - k \cos x + 1 \geq 0$ 恆成立，求 k 的範圍。

13、已知 $(x+1)^2$ 為 $px^{10} + qx^9 + 1$ 的因式，求數對 (p,q) 。

14、求 $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} + \sqrt{x^4 - 3x^2 - 8x + 20}$ 的最小值。

15、 x,y 為正整數， $x > y$ ， $\begin{cases} xy + x + y = 35 \\ x^2y + xy^2 = 286 \end{cases}$ 成立，求 x,y 之值。