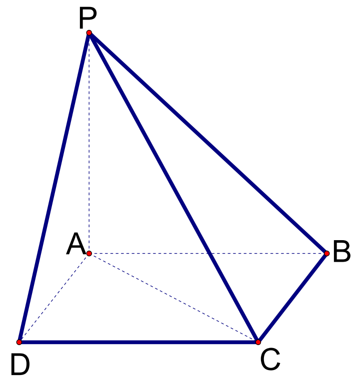
國立竹北高中97年第1次教師甄選 數學科試題

1.如圖，在四稜錐 P-ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，稜邊$\overline{PA}$垂直底面，二面角 P-BC-A 等於45°。



(1)試求$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AB}}$的值(5%)

(2)求$\overline{PD}$與截面 PAC 夾角大小？(5%)

2.設數列$\langle a_n\rangle$的前 n 項和$S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}+\frac{2}{3}$, $n=1,2,3,\ldots$

(1)求首項a_1(2%)

(2)求一般項a_n(3%)

(3)設$T_n=\dfrac{2^n}{S_n}$, $n=1,2,3,\ldots$，證明：$\sum_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$(5%)

3.求$C_k^n 2^k$在 k 為何值時有最大值？ (n 為常數) (10%)

4. 已知函數$f(x)=x^2(x-3a)+\frac{1}{2}$（$a>0$，$x\in\mathbf{R}$）.

(1)求函數$y=f(x)$的極值。(5%)

(2)若方程式$f(x)$=0 有三個不同的實根，求實數a的取值範圍。(5%)

5.從集合$\{2^k \mid 1\le k\le 25 , k\in N\}$中任意選取兩相異數$a$及$b$。則$log_a b$為整數的機率為何？(10%)

6.設$z_1=cos78^\circ+i\,sin78^\circ$，$z_2=cos18^\circ+i\,sin18^\circ$，$i=\sqrt{-1}$，若$(z_1-z_2)^5=a+bi$，$a,b\in R$，則數對$(a,b)=$？（需化簡，求出其值）(10%)

7.空間中有一圓$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ x+2y+2z=9 \end{cases}$，及一點$P(6,3,12)$，若$Q$點在圓$C$上，且$\overline{PQ}$長有最小值$m$，求(1)$m=$？(5%)

(2)$\overline{PQ}$長有最小值時，Q點坐標。(5%)

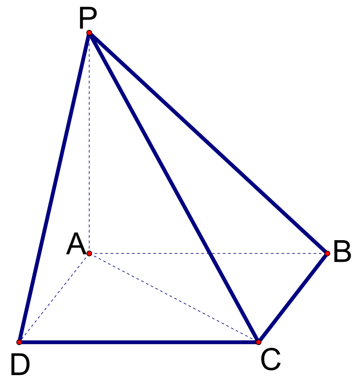
8.當$0<x<\frac{1}{2}$時，不等式$x^2+ax+1\geq 0$恆成立，則a的範圍為何？(10%)

9.已知p為質數，且二次方程式$x^2-2px+p^2-5p-1=0$的兩根均為整數，試求出所有p之值。(10%)

10.已知F為拋物線Γ：$x^2=4y$的焦點，A、B為Γ上焦弦，滿足$AF=\lambda FB$，過A、B分別做切線交於M點，(1)試證：$FM\perp AB$(5%)

(2)請問$\lambda=$？時，使ΔABM面積有最小值。(5%)

國立竹北高中 97 年第 1 次教師甄選 數學科題目解答



1.如圖，在四稜錐 P-ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，稜邊 $\overline{PA}$ 垂直底面，二面角 P-BC-A 等於 45°。

(1)試求 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AB}}$ 的值(5%) $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AB}}=1$

(2)求 $\overline{PD}$ 與截面 PAC 夾角大小？(5%) $30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$

2.設數列 $<a_n>$ 的前 n 項和 $S_n=\dfrac{4}{3}a_n-\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n+1}+\dfrac{2}{3}$, $n=1,2,3,\ldots$

(1)求首項 a_1 (2%) $a_1=2$

(2)求一般項 a_n (3%) $a_n=4^n-2^n$, $n=1,2,3,\ldots$

(3)設 $T_n=\dfrac{2^n}{S_n}$, $n=1,2,3,\ldots$，證明：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$ (5%)

3.求 $C_k^n 2^k$ 在 k 為何值時有最大值？ (n 為常數) (10%)當 $n=3t$ 時 ，k=$\dfrac{2n}{3}$,

當 $n=3t+1$ 時 ，k=$\dfrac{2n+1}{3}$,

當 $n=3t+2$ 時 ，k=$\dfrac{2n-1}{3}$ 或 $\dfrac{2n+2}{3}$

4. 已知函數 $f(x)=x^2(x-3a)+\dfrac{1}{2}$（$a>0$，$x\in\mathbf{R}$）.

(1)求函數 $y=f(x)$ 的極值。(5%)在 $x=0$ 處，函數 $f(x)$ 有極大值 $f(0)=\dfrac{1}{2}$；

在 $x=2a$ 處，函數 $f(x)$ 有極小值 $f(2a)=-4a^3+\dfrac{1}{2}$

(2)若方程式 $f(x)$=0 有三個不同的實根，求實數 a 的取值範圍。(5%) $a>\dfrac{1}{2}$

5.從集合 $\{2^k\,|\,1\le k\le 25,\,k\in N\}$ 中任意選取兩相異數 a 及 b。則 $log_a b$ 為整數的機率為何？

(10%) $\dfrac{31}{300}$

6.設 $z_1=cos78^\circ+i\,sin78^\circ$，$z_2=cos18^\circ+i\,sin18^\circ$，$i=\sqrt{-1}$，若 $(z_1-z_2)^5=a+bi$，$a,b\in R$，

則數對 (a,b)=？（需化簡，求出其值）(10%)（$\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}$）

7.空間中有一圓$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ x+2y+2z=9 \end{cases}$，及一點$P(6,3,12)$，若$Q$點在圓$C$上，且$\overline{PQ}$長有

最小值m，求(1)$m=$？(5%)$\sqrt{101}$

(2)$\overline{PQ}$長有最小值時，Q點坐標。(5%)$(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{10}{3})$

8.當$0<x<\frac{1}{2}$時，不等式$x^2+ax+1\geq 0$恆成立，則a的範圍為何？(10%)$a\geq -\frac{5}{2}$

9.已知p為質數，且二次方程式$x^2-2px+p^2-5p-1=0$的兩根均為整數，

試求出所有p之值。(10%)$p=3,7$

10.已知F為拋物線Γ：$x^2=4y$的焦點，A、B為Γ上焦弦，滿足$AF=\lambda FB$，過A、B分別做切線交於M點，(1)試證：$FM\perp AB$(5%)

(2)請問$\lambda=$？時，使ΔABM面積有最小值。(5%)$\lambda=1$