97 國立大里高中教甄試題

填充題(每題 6 分, 共 36 分)

1. 解 $x^4-22x^2-48x-23=0$.

2. $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 且 $\begin{cases} a+b+c+d &= 6 \\ a^2+2b^2+3c^2+6d^2 &= 10 \end{cases}$, 若 a 的最大值為 M, 最小值為 m, 求數對 (M,m).

3. 球面上有四點 P,A,B,C, 且 $\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC}$ 兩兩垂直, $\overline{PA}=2,\overline{PB}=3,\overline{PC}=6$, 求此球體的體積.

4. $a\in\mathbb{R}$, 過 $P(a,2)$ 作 $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ 的切線, 若所作的切線恰有一條, 求 a 的範圍.

5. 數列:$1,2,4,5,7,9,10,12,14,16,17,19,21,23,25,26,\cdots$, 依此規則, 若第 n 項為 a_n, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

6. 設點 A,B 為 $\Gamma: y^2=4x$ 上除頂點 O 外的兩相異動點, 已知 $\overline{OA}\perp\overline{OB}$, 且 M 為 $\overline{AB}$ 上的點, $\overline{OM}\perp\overline{AB}$, 求 M 的軌跡方程式.

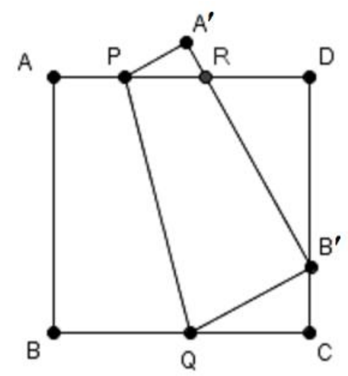
計算題(共 64 分)

1. 數列 $<a_n>$, 已知 $a_1=2$, 設此數列前 n 項的和為 S_n, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ 時, a_n 為 $3S_n-4$ 與 $2-\dfrac{5}{2}S_{n-1}$ 的等差中項,
   (a) 求 a_n. (6 分)
   (b) 證明: $\dfrac{1}{2}(\log_2 S_n+\log_2 S_{n+2})<\log_2 S_{n+1}$. (6 分)

2. 證明 1023 可以整除 $2^{999}+2^{888}+2^{777}+\cdots+2^{222}+2^{111}+1$. (10 分)

3. 一袋中有 m 個白球與 n 個黑球, 自袋中一次取一球, 取後不放回, 直到取完所有白球才停止, 求所取球數的期望值. (10 分)

4. 如圖, $ABCD$ 是邊長為 1 的正方形, 沿 $\overline{PQ}$ 對折, 使得 A,B 對折之後分別重合於 A',B' 兩點, 且 B' 在 $\overline{CD}$上,



   (a) 證明 $\triangle RB'D$ 的周長為 2. (6 分)
   (b) 求 $\triangle QB'C$ 的最大面積. (6 分)

5. 四面體 $ABCD$ 中,M,N 分別為 $\overline{AD},\overline{BC}$ 的中點, $\overline{MN}\perp\overline{AD}$ 且 $\overline{MN}\perp\overline{BC}$, 證明
   (a) $\overline{AB}=\overline{CD}$. (5 分)
   (b) $\overline{AC}=\overline{BD}$. (5 分)

6. $\begin{cases} x^2+y^2 &= 4 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$, 求兩焦點座標. (10 分)