

2015TRML 個人賽第二回解答

I-4. 有兩個同心圓。大圓半徑 \overline{OB} 與小圓交於 C 點，小圓的半徑是4， A 為大圓上一點，若 $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{AC} = 5$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。

【解】餘弦定理即可。

I-5. 方程式 $y^2 + xy - 5x = 0$ 的正整數解 (x, y) 為_____。

$$\text{【解】 } \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + 5\right)^2 + 25 = 0$$

$$(y + x + 5)(y - 5) = -25$$

$$\because x, y \in \mathbb{N} \quad \therefore y + x + 5 = 25, \quad y - 5 = -1 \rightarrow y = 4, \quad x = 16$$

I-6. 若 a, b 都是大於1的實數，則 $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$ 的最小值為_____。

【解】令 $a = 1 + x$ ， $b = 1 + y$

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} = \frac{(1+x)^2}{y} + \frac{(1+y)^2}{x} \geq 2\sqrt{\frac{(1+x)^2(1+y)^2}{xy}} \geq 2\sqrt{\frac{4x \times 4y}{xy}} = 8$$