

青少年數學國際城市邀請賽

個人賽試題

答題時間：120 分鐘

答題指引：

- 請勿翻開此頁，直到聽到答題指令為止。
- 請在下頁的對應位置填寫隊名、您的姓名及編號。
- 個人賽試題包括兩個部份，總分 120 分。
- 第一部份包括填充題 12 題，只須在空格內填寫阿拉伯數值答案，以其他文字書寫一律不計分，不須計算過程，若題目有不只一個答案，則**全部**答對才給分。每題 5 分，答錯不倒扣。
- 第二部份包括計算證明題 3 題，必須填寫詳細計算過程或證明，每題 20 分，根據答題情況給予部份分數。
- 本卷答題時間：120 分鐘。
- 不得使用任何電子計算器具。
- 可使用鉛筆、藍色或黑色圓珠筆作答。
- 答題結束後，監試人員會將所有紙張收回。

Traditional Chinese Version

正體中文版

隊名: 姓名: 編號: 得分:

以下欄位由評審填寫，考生請勿做任何記號

[illegible]

分數																	
----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

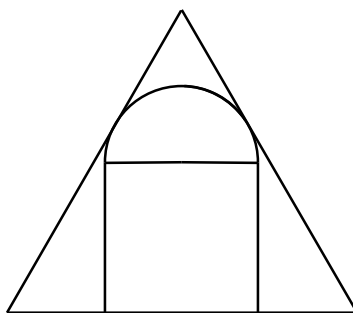
第一部份：

填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 設兩個正整數的和為 2034，且它們的乘積能被 2034 整除。請問這兩個數的差(大數減小數)的最大值是多少？

答：_____

2. 如下圖所示，一個半圓與一個正三角形的兩邊相切，且半圓的直徑為一個正方形的一條邊，這個正方形的另一條邊與正三角形的一條邊重合。已知正三角形的邊長為 12cm，請問半圓的半徑為多少 cm？



答：_____ cm

3. 四位數 \overline{abcd} 是 11 的倍數，其中 $b + c = a$ ，且兩位數 \overline{bc} 是完全平方數。請問 \overline{abcd} 是多少？

答：_____

4. 已知正三角形 ABC 的面積為 $8 + 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ，點 M 是 BC 邊的中點， $\angle MAB$ 的角平分線交 BM 於點 N 。請問 $\triangle ABN$ 的面積為多少 cm^2 ？

答：_____ cm^2

5. 牆上有一個 2×6 的區域，現用紅、白和藍三種顏色的 1×1 瓷磚鋪滿它，且相同顏色的瓷磚不能有公共邊，請問共有多少種鋪法？

答：_____

6. 請問 $1^9 \times 2^8 \times 3^7 \times 4^6 \times 5^5 \times 6^4 \times 7^3 \times 8^2 \times 9^1$ 共有多少個因數是完全平方數？

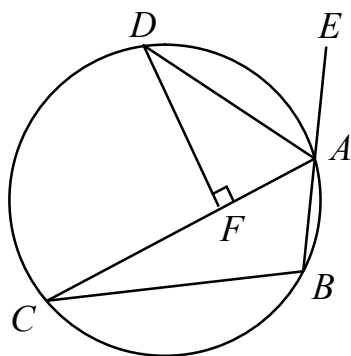
答：_____

7. 請問不超過 20112012 且只用到數碼 0、1 或 2 的正整數共有多少個？

答：_____

8. 如下圖所示， A 、 B 、 C 和 D 為圓上的四個點， E 為 BA 的延長線上的一點。 AD 是 $\angle CAE$ 的角平分線。 DF 垂直於 AC 且點 F 為垂足。

已知 $BA = AF = 2$ cm，請問線段 AC 的長度是多少 cm？



答：_____ cm

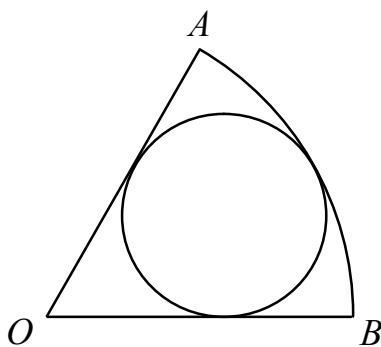
9. 考慮所有四位數 \overline{abcd} ，其中數碼 a, b, c, d 都可能是 1, 2, 3 或 4，但不要求相異。這樣的四位數總共有 256 個。請問這其中有多少個數使得 $ad - bc$ 為偶數？

答：_____

10. 一個圓上的 24 個點把圓周等分成 24 份，請問總共有多少個正三角形滿足至少有兩個頂點在以上這 24 個點之中？

答：_____

11. 如下圖所示，扇形 OAB 是一個圓的六分之一。有一個圓與 OA 、 OB 和弧 AB 都相切，請問這個圓的面積是扇形 OAB 面積的幾分之幾？



答：_____

12. 將一個 8×8 方格棋盤掛在牆上作為鏢靶，三枚完全相同的飛鏢朝此鏢靶射去，每枚飛鏢射中一個不同的小方格的中心。請問共有多少種方式使得任何兩個被射中的小方格至少有一個公共頂點？

答：_____

第二部份：

計算及證明題，請在題目下面空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 設

$$M = \sqrt{2012 \times \sqrt{2013 \times \sqrt{2014 \times \sqrt{\cdots \sqrt{(2012^2 - 3) \times \sqrt{(2012^2 - 2) \times \sqrt{(2012^2 - 1) \times \sqrt{2012^2}}}}}}}}$$

請問 M 的整數部分是多少？

答：_____

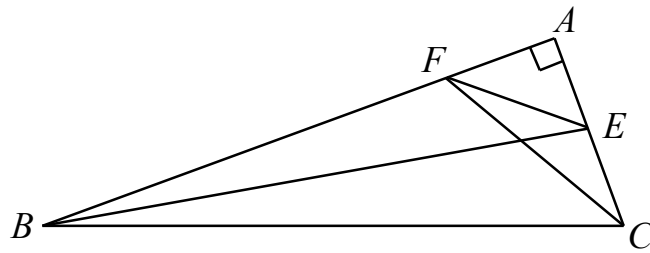
2. 設正整數 m 和 n 滿足

$$n^2 < 8m < n^2 + 60(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

請問 n 的最大值是多少？

答：_____

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ 且 $\angle B = 20^\circ$ 。點 E 和 F 分別在 AC 和 AB 上使得 $\angle ABE = 10^\circ$ 和 $\angle ACF = 30^\circ$ ，如下圖所示。請問 $\angle CFE$ 的度數是多少？



○

答：_____