2015TRML 數學競試團體賽試題

俞克斌老師編寫

6. 設 x 、 y 均為大於 1 的整數，已知 $\log x$ 、 $\log y$ 及 $\log x^3y^2$ 都不是整數，但 $\log x+\log y$ 為整數。若 x^3y^2 是一個 6 位數，則滿足上述條件的所有的數對 (x,y) 中 $x+y$ 最大值為 ________。

【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

答：52

解：因為 x 、 y 均為大於 1 的整數，且 x^3y^2 是一個 6 位數，

故 $\log xy=k\in N$ 且 $5\le\log x^3y^2=2k+\log x<6$

$k=1$ 顯然不合，故 $k=2\Rightarrow xy=10^2\Rightarrow$

x	2	4	5	20	25	50
y	50	25	20	5	4	2
	×	×	×	○	○	○

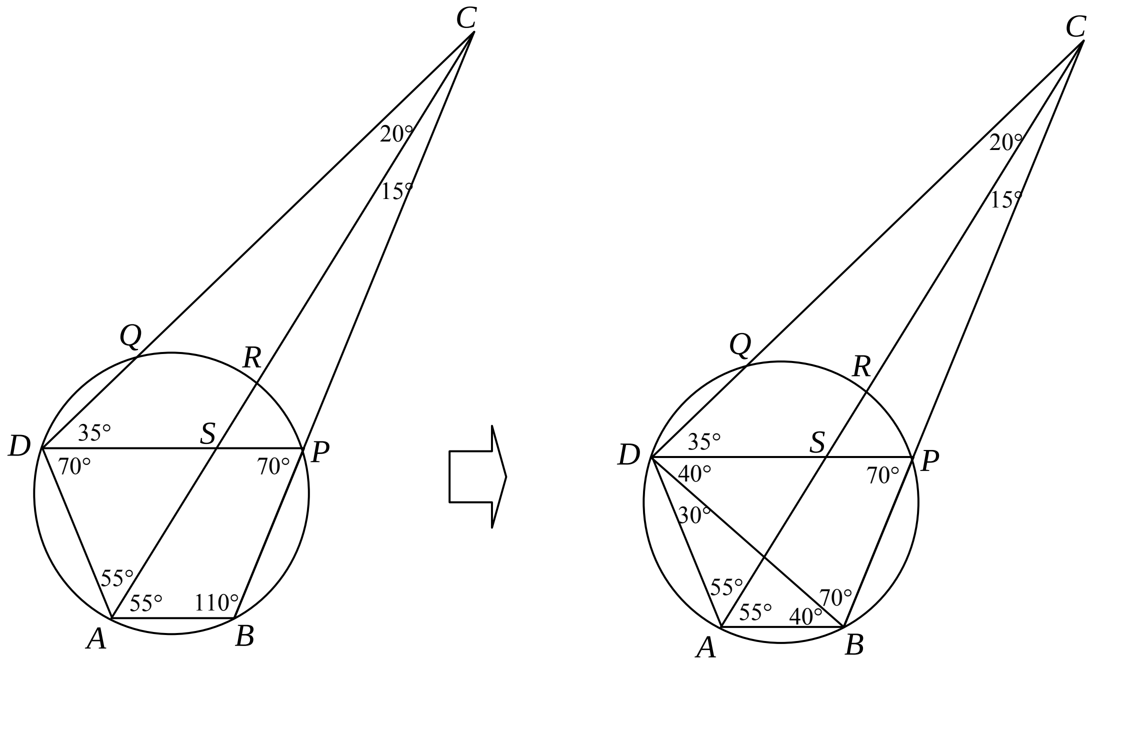
其中 $x+y$ 最大為 52

7. 在四邊形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle ABC=110°$ 、 $\angle BCD=35°$ 、 $\angle CDA=105°$，若 $\overline{AC}$ 平分 $\angle DAB$，則 $\angle ABD=$ ________。

【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

答：40°

解：



8. 在圓周上有268個位置，現依順時針方向將每個位置填入一個整數，
若其第17個位置的數爲3，第83個位置的數爲4及第144個位置的數爲9，
且任20個連續位置的數之和恆爲75，則第210個位置的數爲________。
【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

答：-1

解：$g.c.d\left(268,20\right)=4$，表每四項一循環

$\sum_{k=i+1}^{i+20} a_k = 5\sum_{k=i+1}^{i+4} a_k = 75 \Rightarrow \sum_{k=i+1}^{i+4} a_k = 15$

又$a_{17}=a_{4k+1}=3$，$a_{83}=a_{4k+3}=4$，$a_{144}=a_{4k+4}=9$

故$a_{210}=a_{4k+2}=-1$

9. 小明有$2n$張紙牌，依序寫著編號1至$2n$，小明拿走n張連續編號的紙牌，若剩下n張紙牌上各數的和爲2015，則$n=$________。
【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

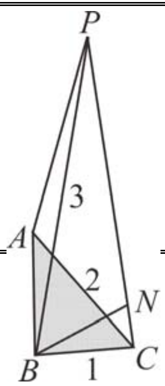
答：62

解：$1+2+3+\cdots\cdots+2n=2015+\left(k+1\right)+\left(k+2\right)+\cdots\cdots+\left(k+n\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\left(2n+1\right)\cdot 2n}{2}=2015+\dfrac{\left(2k+1+n\right)\cdot n}{2}$，$k\le n$

$\Rightarrow 3n^2+\left(1-2k\right)n-4030=0 \Rightarrow n=62$，$k=61$

10. 設$P-ABC$爲一個三角錐，
其中$\overline{AB}=\sqrt{3}$、$\overline{BC}=1$、$\overline{CA}=2$、$\overline{PA}=3$，
且$\overline{PA}$垂直底面ABC，
若點N爲點B在稜$\overline{PC}$上的垂足，
則$\overline{BN}$之長爲________。【2015 第十七屆 TRML 團體賽】



答：$\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

解：因爲$\overline{AB}=\sqrt{3}$、$\overline{BC}=1$、$\overline{CA}=2 \Rightarrow \angle ABC=90^\circ$

又$\overline{PA}$垂直底面ABC，

由「三垂線定理」知：$\angle PBC=90^\circ$，而$\overline{PB}=2\sqrt{3}$，$\overline{PC}=\sqrt{13}$，

故$\overline{BN}$之長爲$\dfrac{2\sqrt{3}\times 1}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$