2015TRML 數學競試團體賽試題

俞克斌老師編寫

1. 若 $n=2015^{2015}$，則 n 除以 11 的餘數爲________。

【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

答：10

解：$R_{11}\left(2015^{2015}\right)=R_{11}\left(2^{2015}\right)=R_{11}\left(32^{403}\right)=R_{11}\left((-1)^{403}\right)=R_{11}(-1)=10$

2. 設 x 爲實數，若 $M(x)$ 表示 $-\frac{1}{2}x+3$、$-2x-5$、$x+6$ 三數中最大的數，則 $M(x)$ 的最小值爲________。

【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

答：4

解：若 $-\frac{1}{2}x+3$ 爲最大數 $\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}x+3\geq -2x-5\\ -\frac{1}{2}x+3\geq x+6\end{cases}\Rightarrow -\frac{16}{3}\leq x\leq -2\Rightarrow 4\leq -\frac{1}{2}x+3\leq\frac{17}{3}$

$\Rightarrow M(x)$ 最小值 4

若 $-2x-5$ 爲最大數 $\Rightarrow\begin{cases}-2x-5\geq -\frac{1}{2}x+3\\ -2x-5\geq x+6\end{cases}\Rightarrow x\leq\frac{-16}{3}\Rightarrow -2x-5\geq\frac{17}{3}$

$\Rightarrow M(x)$ 最小值 $\frac{17}{3}$

若 $x+6$ 爲最大值 $\Rightarrow\begin{cases}x+6\geq -\frac{1}{2}x+3\\ x+6\geq -2x-5\end{cases}\Rightarrow x\geq -2\Rightarrow x+6\geq 4\Rightarrow M(x)$ 最小值 4

綜合上述，$M(x)$ 最小值爲 4

3. 若 $a\geq 0$、$b\geq 0$、$c\geq 0$，滿足 $\begin{cases}a+b+2c=5\\ 2a+3b-4c=1\end{cases}$，則 $a+2b-3c$ 的最大值爲________。

【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

答：$\frac{1}{5}$

解：$\begin{cases}a+b+2c=5\\ 2a+3b-4c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=14-10t\geq 0\\ b=-9+8t\geq 0\\ c=t\geq 0\end{cases}\Rightarrow\frac{9}{8}\leq t\leq\frac{7}{5}$

$a+2b-3c=14-10t-18+16t-3t=3t-4$

$\Rightarrow$ 而 $\frac{-5}{8}\leq 3t-4\leq\frac{1}{5}$，表 $a+2b-3c$ 最大值 $\frac{1}{5}$

4. 滿足不等式$\left|\left|x^2-2x+5\right|-84\right|\le 64$的整數解有________個。

【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

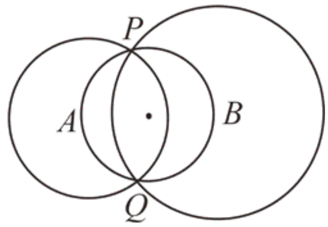
答：18

解：$\left|\left|x^2-2x+5\right|-84\right|\le 64 \Rightarrow 20\le\left|x^2-2x+5\right|\le 148 \Rightarrow 20\le x^2-2x+5\le 148$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-15\ge 0 \\ x^2-2x-143\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-5)(x+3)\ge 0 \\ (x-13)(x+11)\le 0 \end{cases} \Rightarrow -11\le x\le -3$ 或 $5\le x\le 13$

$\xrightarrow{x\in Z} x=-11$，$-10$，……，$-3$，$5$，$6$，……，$13$ 共18個解

5. 設平面上圓O_1、圓O_2、圓O_3三個圓均過P、Q兩相異點，且圓O_1的圓心A與圓O_2的圓心B皆落在圓O_3上，如圖所示。若圓O_1的半徑爲3、圓O_2的半徑爲4，則線段PQ之長爲________。



【2015 第十七屆 TRML 團體賽】

答：$\dfrac{24}{5}$

解：由中線定理（或餘弦定理）

知$r=\dfrac{5}{2}\Rightarrow 2r=5$

故ΔPAB爲直角三角形

則$\overline{PO}=2\times\dfrac{3\times 4}{5}=\dfrac{24}{5}$