104 年大學入學指定科目考試試題
數學乙

俞克斌老師編寫

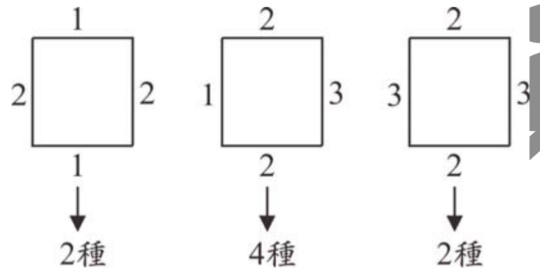
第壹部分：選擇題（占 76 分）

一、單選題（占 12 分）

1. 將正方形 $ABCD$ 的每一條邊各自標上 1、2、3 中的某一個數，使得任兩條相鄰的邊，都標有恰好差 1 的兩位數。滿足這種條件的標示法總共有多少種？
(1) 2　(2) 4　(3) 6　(4) 8　(5) 10　【104 數乙】

答：(4)

解：



2. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆爲整數的點稱爲『格子點』。
設 n 爲正整數，已知在第一象限且滿足 $x+2y\le 2n$ 的格子點 (x,y) 的數目爲 a_n。
則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$ 的值爲下列哪一個選項？
(1) 0　(2) 1　(3) $\dfrac{4}{3}$　(4) 2　(5) 4　【104 數乙】

答：(2)

解：$a_n=[(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1]\times 2=n(n-1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n^2}=1$

二、多選題（占 40 分）

3. 針對某 50 人的班級調查喝飲料的習慣，發現其中習慣半糖(糖份減半)的有 37 人，而習慣去冰(不加冰塊)的有 28 人。現在若隨機抽問該班一位同學，他喝飲料的習慣是半糖且去冰的機率有可能是下列哪些選項？
(1) 0.28　(2) 0.46　(3) 0.56　(4) 0.66　(5) 0.74　【104 數乙】

答：(2)(3)

解：$37+28-50\le n(\text{半糖}\cap\text{去冰})\le Min\{28,37\}$

$15\le n(\text{半糖}\cap\text{去冰})\le 28$

$\dfrac{15}{50}\le P(\text{半糖}\cap\text{去冰})\le\dfrac{28}{50}$

$0.30\le P(\text{半糖}\cap\text{去冰})\le 0.56$

4. 半導題產業的摩爾定律認爲『積體電路板可容納的電晶體數目每兩年增加一倍』。
用 $f(t)$ 表示從 $t=0$ 開始，電晶體數目隨時間 t 變化的函數，並假設 $f(0)=1000$。
下面選項中，請選出可以代表摩爾定律的公式。

(1) 若 t 以年爲單位，則 $f(t)=1000+\dfrac{1000}{2}t$

(2) 若 t 以月爲單位，則 $f(t)=1000+\dfrac{1000}{24}t$

(3) 若 t 以年爲單位，則 $f(t)=1000\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{t}$

(4) 若 t 以年爲單位，則 $\log f(t)=3+\dfrac{\log\left(\dfrac{3t}{2}+1\right)}{2}$

(5) 若 t 以月爲單位，則 $\log f(t)=3+\dfrac{\log 2}{24}t$ 【104 數乙】

答：(3)(5)

解：以年爲單位 $f(t)=1000\times 2^{\frac{t}{2}}=1000\left(\sqrt{2}\right)^{t}$

以月爲單位 $f(t)=1000\times 2^{\frac{t}{24}}\Rightarrow \log f(t)=\log 1000+\log 2^{\frac{t}{24}}\Rightarrow \log f(t)=3+\dfrac{t\log 2}{24}$

5. 下表是兩年前三種零食分別在兩間超市的單價：(單位：元/包)

	超市甲	超市乙
蘇打餅	30	28
薯　片	55	50
魷魚絲	70	66

上表以單價矩陣 $\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$ 表示。

如果這兩間超市都以每年3% 比例調漲物價的價格，
請問下列哪些選項的計算結果可以代表現在這些零食在兩間超市的單價矩陣？

(1) $2\cdot(1.03)\cdot\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$　　(2) $(1.03)^2\cdot\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}2\cdot(1.03) & 0 & 0\\ 0 & 2\cdot(1.03) & 0\\ 0 & 0 & 2\cdot(1.03)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}1.03 & 0 & 0\\ 0 & 1.03 & 0\\ 0 & 0 & 1.03\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.03 & 0\\ 0 & 1.03\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}(1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2\\ (1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2\\ (1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$ 【104 數乙】

答：(2)(4)

$\boxed{解}$：(2) $(1.03)^2\begin{bmatrix}30 & 28\\55 & 50\\70 & 66\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\times(1.03)^2 & 28\times(1.03)^2\\55\times(1.03)^2 & 50\times(1.03)^2\\70\times(1.03)^2 & 66\times(1.03)^2\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}1.03 & 0 & 0\\0 & 1.03 & 0\\0 & 0 & 1.03\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 28\\55 & 50\\70 & 66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.03 & 0\\0 & 1.03\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}30\times(1.03) & 28\times(1.03)\\55\times(1.03) & 50\times(1.03)\\70\times(1.03) & 66\times(1.03)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.03 & 0\\0 & 1.03\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\times(1.03)^2 & 28\times(1.03)^2\\55\times(1.03)^2 & 50\times(1.03)^2\\70\times(1.03)^2 & 66\times(1.03)^2\end{bmatrix}$

6. 設 $f(x)$一實係數多項式，且 $f(x)$除以$(x-1)(x-2)^2$的餘式爲$(x-2)^2+g(x)$，其中 $g(x)$爲一次多項式。請選擇正確的選項。
(1) 若知道 $f(1)$及 $f(2)$，則可求出 $g(x)$
(2) $f(x)$除以$(x-2)$的餘式是 $g(2)$
(3) $f(x)$除以$(x-1)$的餘式是 $g(1)$
(4) $f(x)$除以$(x-2)^2$的餘式是 $g(x)$
(5) $f(x)$除以$(x-1)(x-2)$的餘式是 $x-2+g(x)$ 【104 數乙】

$\boxed{答}$：(1)(2)(4)

$\boxed{解}$：(4) $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-2)^2+g(x)$……對

(1) $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-2)^2+ax+b$

$\left.\begin{array}{l}f(1)=1+a+b=h\text{已知}\\f(2)=0+2a+b=k\text{已知}\end{array}\right\}$可得 a、b……對

(2) $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-2)^2+a(x-2)+g(2)$……對

(5) $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-1)(x-2)+(a-1)x+(b+2)$
而$(a-1)x+(b+2)=(-x+2)+g(x)$

(3) $f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-1)(x-2)+(a-1)(x-1)+a+b+1$
而 $a+b+1=g(1)+1$

7. 下表是某國在 2009 年至 2015 年間，運動選手的統計人數：

年份	男生	女生
2009	3410	1950
2010	3420	2000
2011	3540	2240
2012	3710	2370
2013	3830	2650
2014	3920	2780
2015	3990	2860

關於該國運動選手，請根據這張表選出正確的敘述。
(1) 從 2009 年至 2015 年間，男運動選手增加的總人數比女運動選手增加的總人數多

(2) 從 2009 年至 2015 年間，平均一年增加了 580 名男運動選手
(3) 從 2009 年至 2015 年間，男女運動選手人數差距逐年持續縮小
(4) 如果分別計算男女運動選手人數對年份的迴歸直線(最適直線)，
則男生的直線斜率小於女生的直線斜率
(5) 在 2009 年至 2015 年共 7 年中，全國平均一年有超過 6000 名運動選手 【104 數乙】

答：(4)(5)

解：

年份	男增加	女增加	總人數
2009			5360
2010	10	50	5420
2011	120	240	5780
2012	170	130	6080
2013	120	280	6480
2014	90	130	6700
2015	70	80	6850
$\sum$	580	910	42670

三、填充題（占 24 分）

1. 若 a 爲整數，且 $y=-7x^2+ax+\dfrac{1}{3}$ 的圖形與 x 軸的兩個交點都介於 $x=-1$ 與 $x=1$ 之間，則滿足這樣條件的 a 有________個。 【104 數乙】

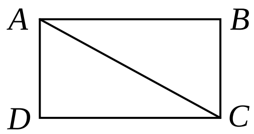
答：13

解：判別式 $=a^2-4(-7)\left(\dfrac{1}{3}\right)>0$ 恆成立

$f(1)=-7+a+\dfrac{1}{3}<0 \Rightarrow a<\dfrac{20}{3}$ 且 $f(-1)=-7-a+\dfrac{1}{3}<0 \Rightarrow a>-\dfrac{20}{3}$

$a=-6,-5,-4,\cdots,4,5,6$ 共 13 個

2. 如圖，長方形 $ABCD$ 中 $\angle CAB=30^\circ$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AC}\right|$，
則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$________。 【104 數乙】



答：12

解：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow 2t\cdot t\cdot\cos 60^\circ=2t \Rightarrow t=2$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4\times 2\sqrt{3}\times\cos 30^\circ=12$

3. 某校數學教師針對高三學生隨機選出 30 名男學生及 20 名女學生，
做新教材適應性的調查，每一位學生都要填答，且只能填答適應或不適應。
結果有 35 名學生填答無法適應新教材內容。假設學生性別與適應狀況獨立，
請完成下列表格，使其最能符合上述假設________。

適應狀況 / 性別	適應	不適應（35 人）
男生（30 人）	_____人	_____人
女生（20 人）	_____人	_____人

【104 數乙】

答：9；21；6；14

解：

	適	不適
男	$30-x$	x
女	$x-15$	$35-x$

$$\frac{30-x}{x-15}=\frac{x}{35-x} \Rightarrow x=21$$

	適	不適
男	9	21
女	6	14

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

1. 根據內政部營建署《建築物無障礙設施設計規範》，無障礙通路之設計須符合以下規定。

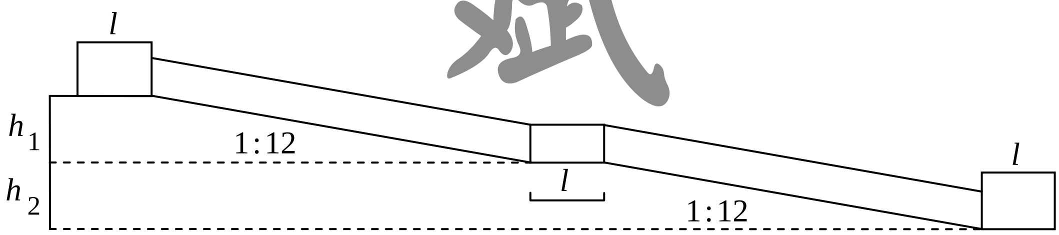
◎ 坡道之坡度（高度水平長度之比值）不得大於 $\frac{1}{12}$

◎ 坡道之起點及終點，應設置長、寬各 150 公分以上之平台。
此處的長，指的是水平長度，而非斜面的長度。

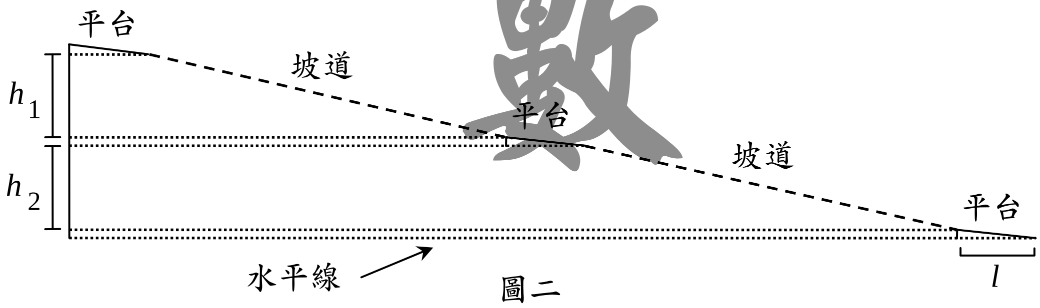
◎ 坡道的中間應設置適當數量的平台，使得每段坡道的高差不超過 75 公分，
且平台的水平長度至少 150 公分。

◎ 各平台之坡度不得大於 $\frac{1}{50}$

圖一與圖二爲側面示意圖，圖一摘自此規範書，圖二爲圖一的簡明版，
其中 $l \ge 150$，$h_1, h_2 \le 75$；坡道之坡度相當於坡道斜率之絕對值。



圖一



圖二

以上述規定，一條升高 2 公尺的無障礙坡道，在無轉彎的條件下，
其最小可能的水平長度（含平台）爲多少公尺？【104 數乙】

答：28.56 公尺

解：$200=\left(75\times n+y\right)+\left(150\times\frac{1}{50}\times\left(n+2\right)\right)$，$n\in N$，$y<75$

水平長度（含平台）$\left(75\times n+y\right)\times 12+\left(150\times\left(n+2\right)\right)$

$n=2$，$y=38$，水平長度（含平台）有最小值 2856

2. 某航空公司因機械故障而停飛，
致使平安旅行社原來預定搭此航空公司班機返台的 25 位旅客，被迫滯留在當地。
經領隊詢問後得知，另外三家航空公司飛往台灣近期的機位已滿，都必須等待，
當時有三種方案可以將旅客送回台灣如下表（表中的數據是以每人爲單位）。
例如 A 方案，旅行社必須負擔每人 4500 元的食宿費加上 400 元的轉機價差。

方案	食宿費	轉機價差	返台所需等待時間
A 轉搭甲航空公司的班機	4500 元	400 元	3 天
B 轉搭乙航空公司的班機	5500 元	200 元	4 天
C 轉搭丙航空公司的班機	8000 元	0 元	6 天

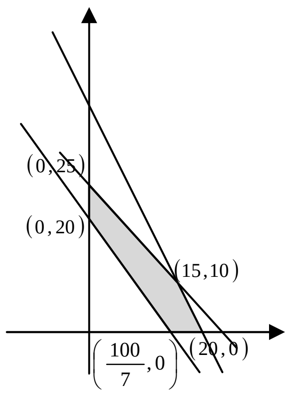
註：轉機價差是指「轉搭其他航空公司的班機」所需補的票價差額。

領隊向旅行社報後，旅行社同意領隊可以使用下列經費來解決此事件：
食宿費總共最多 150000 元，轉搭其他航空公司班機的轉機價差總共最多 8000 元。
試問在經費允許的條件下，要如何分配採用 A、B、C 這三種方案的人數，
才能使全部旅客返回台灣所用的等待總人天數最少？
所謂等待總人天數是採用各方案的人數乘以等待的天數之總和，
例如：若採用 A、B、C 方案的人數分別爲 8、10、7 人，
則等待總人天數爲 $8\times3+10\times4+7\times6=106$（人天）。
如果領隊規劃 x 人轉搭甲航空公司的班機、y 人轉搭乙航空公司的班機，
其餘的旅客轉搭丙航空公司的班機，由下列步驟，
求出全部旅客返回台灣所用的最少等待總人天數。
(1) 寫出此問題的線性規劃不等式及目標函數。
(2) 求可行解區域的所有頂點座標。
(3) 求全部旅客返回台灣所用的最少等待總人天數。 【104 數乙】

答：(3) 85 (總人天數)

解：
$$\begin{cases} 4500x+5500y+8000(25-x-y)\le 150000 \\ 400x+200y+0(25-x-y)\le 8000 \\ x+y\le 25 \\ x,y\in N\cup\{0\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 7x+5y\ge 100 \\ 2x+y\le 40 \\ x+y\le 25 \\ x,y\in N\{0\} \end{cases}$$



目標函數 $3x+4y+6(25-x-y)=150-3x-2y$
在 $x=15$，$y=10$ 時，有 $Min\,85$