

1-1 數與數線

重點整理

符號： $\forall$ 所有 $\exists$ 存在 $\exists!$ 存在且唯一 $\vee$ 或 $\wedge$ 且 $\Leftrightarrow$ 若且唯若
 $\in$ 屬於 $\notin$ 不屬於 $\ni$ 使得 s.t. 使得

正整數：正整數又稱為自然數、計物數，全體正整數所成的集合記為 $\mathbb{N}$ ，
以符號 $a \in \mathbb{N}$ 表示 a 屬於全體正整數中的一個元素，
以符號 $a \notin \mathbb{N}$ 表示 a 不屬於全體正整數中的一個元素。

整數：全體整數所成的集合記為 $\mathbb{Z}$ ，
以符號 $a \in \mathbb{Z}$ 表示 a 屬於全體整數中的一個元素，
以符號 $a \notin \mathbb{Z}$ 表示 a 不屬於全體整數中的一個元素。

有理數：凡可以表示乘兩個整數相除的數，稱為有理數。
亦即可以表示成 $\frac{q}{p}$ 的數，其中 p 、 q 皆為整數且 $p \neq 0$ ，稱為有理數。
全體有理數所成的集合記為 $\mathbb{Q}$ 。

有理數的四則運算與相等：

設 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 且 $bd \neq 0$ ，則

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ 。
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ ， $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ ，
 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ， $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ ($c \neq 0$)。

有理數的封閉性：任兩個有理數的 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ (0 不當分母) 皆為有理數。

有限小數化為分數：可以化為有限小數的有理數，寫成最簡分數之後，分母必定只含有 2, 5 的質因數。

有理數化為小數：有理數只可能為「整數、有限小數、或循環小數」。

小數化為有理數： $ab.cde\overline{fghi} = \frac{abcdefghi - fghi}{9999000}$
(分母：小數點後有循環寫 9、沒循環寫 0；
分子：“全部”扣掉“循環節”。)

有理數的稠密性：在任兩個有理數之間，必定至少存在有另一個有理數。
($\forall a, b \in \mathbb{Q} \wedge a < b, \exists c \in \mathbb{Q} \ni a < c < b$ 。)

無理數：在數線上，不為有理數的數，稱為無理數。無理數必為無限不循環小數。
無理數包含有不盡根號數，如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots$ 等，
也包含有超越數 (非代數方程式的解)，如 π 等。

無理數的相等：

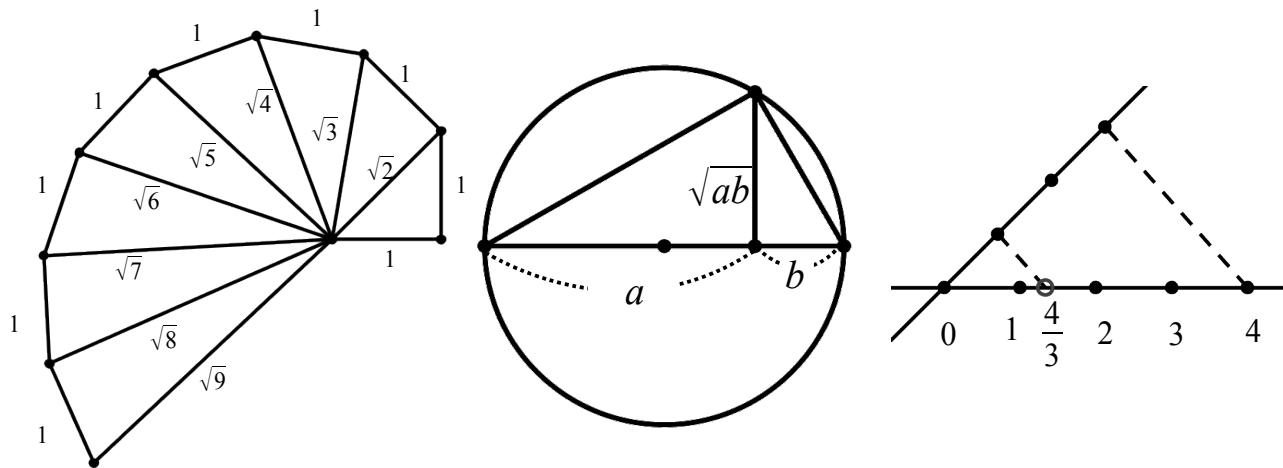
1-1 數與數線

設 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, ω 為無理數, 則

- $a + b\omega = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ 。
- $a + b\omega = c + d\omega \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ 。

實數：凡可以在實數線上找到的數，都稱為實數。全體實數所成的集合，記作 $\mathbb{R}$ 。

尺規作圖：有理數及二次根號數都可以尺規作圖。



雙重根號的化簡：

設 $a \geq b \geq 0$, 則 $\sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 且 $\sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ 。

實數對於四則運算的性質：

設 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 則

- 交換律： $a+b=b+a$, $ab=ba$
- 結合律： $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$
- 分配律： $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$
- 消去律： $a+c=b+c \Rightarrow a=b$ 。 $ac=bc \wedge c \neq 0 \Rightarrow a=b$

實數集合的有序性：

設 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 則

- 三一律：「 $a > b$ 、 $a = b$ 、 $a < b$ 」三式中恰有一個成立。
- 遞移律： $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
- 等量加法律： $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
- 乘法律： $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc$ 。 $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$ 。
- 正定性： $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$, 且當等號成立時，若且唯若 $a = 0$ 。

實數的絕對值：設 $a \in \mathbb{R}$, 則定義 $|a| = \begin{cases} a, & \text{if } a \geq 0 \\ -a, & \text{if } a < 0 \end{cases}$

$|a|$ 亦表示在數線上 a 與原點的距離。

絕對值的性質：