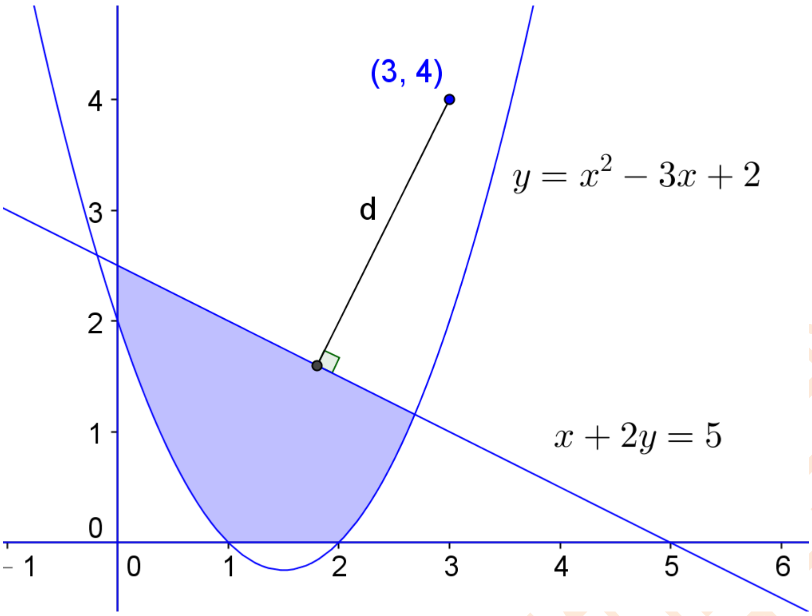
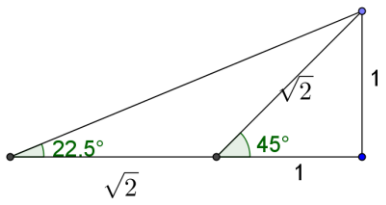
<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>已知 $x \ge 0$，$y \ge 0$ 且滿足 $\begin{cases} x+2y \le 5 \\ y \ge x^2-3x+2 \end{cases}$，則 $z=x^2-6x+y^2-8y$ 的最小值為？

【解答】$-\dfrac{89}{5}$

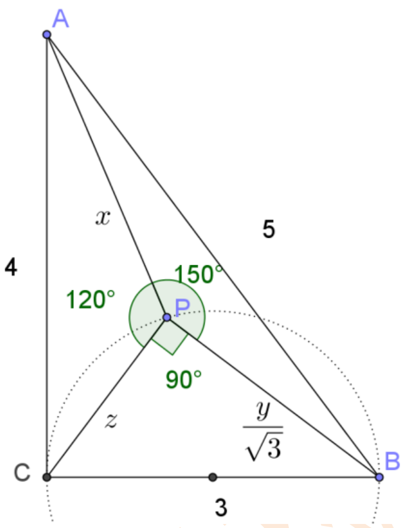
【詳解】$z=x^2-6x+y^2-8y=(x-3)^2+(y-4)^2-25$，其中的 $(x-3)^2+(y-4)^2$ 視為符合的點 (x,y) 到點 $(3,4)$ 的距離 d 的平方。


將條件區域畫出，為一直線截一拋物線，在第一象限內部區域，如圖所示，顯然距離有最小值時，發生在直線 $x+2y=5$ 上，點 $(3,4)$ 到直線 $x+2y=5$ 的距離 $d=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$，
所求 $z=(\dfrac{6}{\sqrt{5}})^2-25=-\dfrac{89}{5}$</td>
<td>104
嘉
義
女
中</td>
<td>1</td>
<td></td>
<td>A
0
2
2
5</td>
</tr>
</table>

1	已知數列$\langle a_n\rangle$ 的一般項$a_n=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}+\tan 22^\circ}+\frac{1}{1+\sqrt{2}+\tan 23^\circ}\right)^n$，$n\in N$，則$a_{20}=$ ？ 【解答】$\frac{1}{1024}$ 【詳解】 由圖可知$1+\sqrt{2}=\tan 67.5^\circ$， $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\tan 22^\circ}+\frac{1}{1+\sqrt{2}+\tan 23^\circ}=\frac{1}{\tan 67.5^\circ+\tan 22^\circ}+\frac{1}{\tan 67.5^\circ+\tan 23^\circ}$ $=\frac{1}{\frac{\sin 67.5^\circ}{\cos 67.5^\circ}+\frac{\sin 22^\circ}{\cos 22^\circ}}+\frac{1}{\frac{\sin 67.5^\circ}{\cos 67.5^\circ}+\frac{\sin 23^\circ}{\cos 23^\circ}}$ $=\frac{\cos 67.5^\circ\cos 22^\circ}{\sin 67.5^\circ\cos 22^\circ+\sin 22^\circ\cos 67.5^\circ}+\frac{\cos 67.5^\circ\cos 23^\circ}{\sin 67.5^\circ\cos 23^\circ+\sin 23^\circ\cos 67.5^\circ}$ $=\frac{\cos 67.5^\circ\cos 22^\circ}{\sin 89.5^\circ}+\frac{\cos 67.5^\circ\cos 23^\circ}{\sin 90.5^\circ}$ $=\frac{\cos 67.5^\circ}{\sin 89.5^\circ}(\cos 22^\circ+\cos 23^\circ)$ $=\frac{\cos 67.5^\circ}{\sin 89.5^\circ}(2\cos 22.5^\circ\cos 0.5^\circ)$ $=2\cos 67.5^\circ\cos 22.5^\circ$ $=\cos 90^\circ+\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 所求$a_{20}=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{20}=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$。	104 嘉 義 女 中	2		A 0 2 2 6

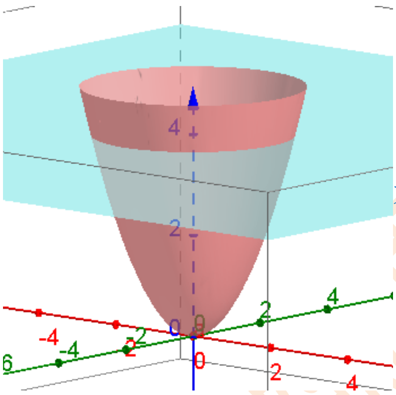
<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>
設正數 x,y,z 滿足方程組 $\begin{cases} x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=25 \\ \frac{1}{3}y^2+z^2=9 \\ z^2+xz+x^2=16 \end{cases}$，則 $xy+2yz+3zx=$？

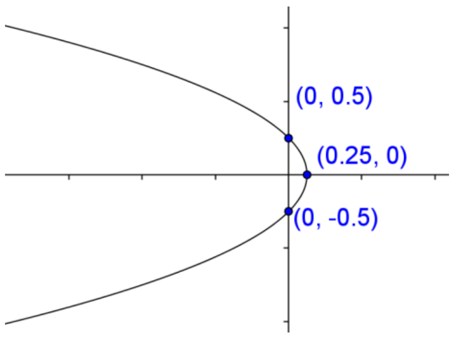
【解答】$24\sqrt{3}$

【詳解】將 $x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=25$ 改為 $5^2=x^2+(\frac{y}{\sqrt{3}})^2-2\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\cos\theta_1$，則 $\cos\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，
同樣方法 $3^2=(\frac{y}{\sqrt{3}})^2+z^2-2\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z\cdot\cos\theta_2$，$\cos\theta_2=0$；$4^2=x^2+z^2-2xz\cos\theta_3$，
$\cos\theta_3=-\frac{1}{2}$，可視為邊長 3、4、5 的直角三角形內部一點 P，到三頂點距離分別為
x,y,z，且 x,y,z 三線段夾角分別為 $\theta_1=150°,\theta_2=90°,\theta_3=120°$。


如圖，$\overline{PA}=x,\overline{PB}=\frac{y}{\sqrt{3}},\overline{PC}=z$ 滿足此方程組，
而由面積 $\Delta PAB+\Delta PBC+\Delta PCA=\Delta ABC=6$，可知
$\frac{1}{2}\left[\frac{xy}{\sqrt{3}}\cdot\sin150°+\frac{yz}{\sqrt{3}}\sin90°+xz\sin120°\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{xy}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{yz}{\sqrt{3}}+xz\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=6$，整理可得
$\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3zx)=6$，所求 $xy+2yz+3zx=24\sqrt{3}$。
</td>
<td>104
嘉
義
女
中</td>
<td>3</td>
<td></td>
<td>A
0
2
2
7</td>
</tr>
</table>

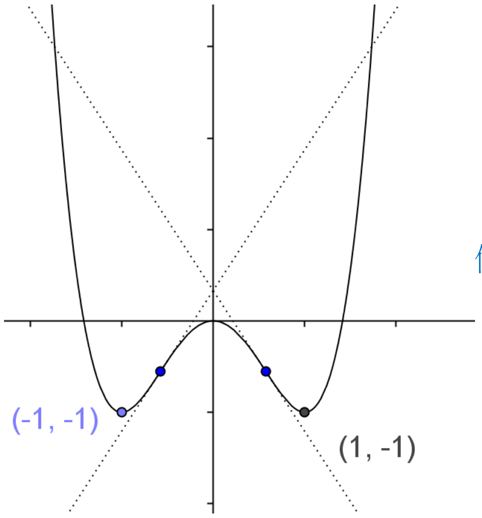
1	設多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a,b,c,d 為常數)滿足 $f(1)=1993$，$f(2)=3986$，$f(3)=5979$，則 $\frac{1}{4}(f(11)+f(-7))=$？ 【解答】5233 【詳解】觀察 $f(2)=2\times1993, f(3)=3\times1993$，由此可令 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-k)+1993x$。 所求 $\frac{1}{4}(f(11)+f(-7))=$ $=\frac{1}{4}[(11-1)(11-2)(11-3)(11-k)+1993\cdot11+(-7-1)(-7-2)(-7-3)(-7-k)+1993\cdot(-7)]$ $=\frac{1}{4}[10\cdot9\cdot8\cdot(11-k)-8\cdot9\cdot10(-7-k)+1993\cdot(11-7)]$ $=\frac{1}{4}[10\cdot9\cdot8\cdot11-8\cdot9\cdot10\cdot(-7)+1993\cdot(11-7)]$ $=3240+1993=5233$	104 嘉義女中	4		A0228
1	設 $a>b>c>1$，則 $\log\frac{a}{c}(\log_{\frac{a}{b}}10+\log_{\frac{b}{c}}10)$ 的最小值為？ 【解答】4 【詳解】原式 $=\log\frac{a}{c}\left(\frac{1}{\log\frac{a}{b}}+\frac{1}{\log\frac{b}{c}}\right)=\log\frac{a}{c}\left(\frac{\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{c}}{\log\frac{a}{b}\log\frac{b}{c}}\right)=\frac{(\log\frac{a}{c})^2}{\log\frac{a}{b}\log\frac{b}{c}}$。 利用算幾不等式，可知 $\frac{\log\frac{a}{c}}{2}=\frac{\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{c}}{2}\geq\sqrt{\log\frac{a}{b}\log\frac{b}{c}}$， $\Rightarrow\left(\frac{\log\frac{a}{c}}{2}\right)^2\geq\log\frac{a}{b}\log\frac{b}{c}$，所以倒數 $\left(\frac{2}{\log\frac{a}{c}}\right)^2\leq\frac{1}{\log\frac{a}{b}\log\frac{b}{c}}$，代入前式可知 $\frac{(\log\frac{a}{c})^2}{\log\frac{a}{b}\log\frac{b}{c}}\geq\frac{2^2(\log\frac{a}{c})^2}{(\log\frac{a}{c})^2}=4$。	104 嘉義女中	5		A0229

1	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+k}=$ ？ 【解答】$\dfrac{1}{3}$ 【詳解】利用夾擠定理，因$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+1}$， 而$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+1}=\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1}=\dfrac{1}{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+n}=\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n}=\dfrac{1}{3}$，所求為$\dfrac{1}{3}$。	104 嘉 義 女 中	6		A 0 2 3 0
1	設 S 是由曲面$z=x^2+y^2$ 與平面$z=4$ 所圍之立體，則 S 的體積$V_S=$？ 【解答】8π 【詳解】$V_S=\int\int\int_{x^2+y^2}^{4}dzdxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^{4}dz\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r-r^3drd\theta=\int_0^{2\pi}4d\theta=8\pi$ 【備註】不是圓錐	104 嘉 義 女 中	7		A 0 2 3 1

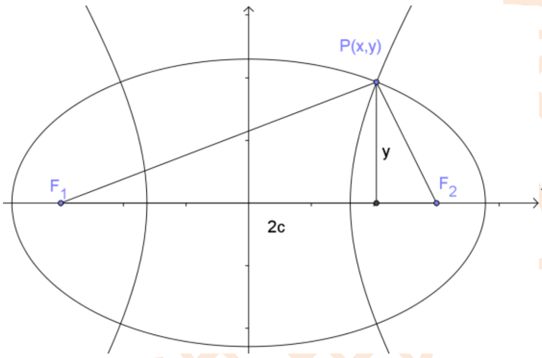
1	設複數 z 在複數平面上的對應點為單位圓 $x^2+y^2=1$ 上的動點，令 $\omega=\dfrac{1}{(1+z)^2}$，則 ω 在複數平面上的對應點的軌跡方程式為？ 【解答】 $y^2=-x+\dfrac{1}{4}$ 【詳解】令 $z=x+yi$ ， $\omega=a+bi$ ，整理 $a+bi=\dfrac{1}{(1+x+yi)^2}=\dfrac{(1+x-yi)^2}{(1+x+yi)^2(1+x-yi)^2}=\dfrac{\left[(1+x)^2-y^2\right]+\left[-2y(1+x)\right]i}{\left[(1+x)^2+y^2\right]^2}$ 利用 $x^2+y^2=1$ 化簡 a,b。 $a=\dfrac{\left[(1+x)^2-y^2\right]}{\left[(1+x)^2+y^2\right]^2}=\dfrac{\left[2x+2x^2\right]}{\left[2+2x\right]^2}=\dfrac{2x(x+1)}{4(x+1)^2}=\dfrac{x}{2(x+1)}$ ， $b=\dfrac{\left[-2y(1+x)\right]}{\left[(1+x)^2+y^2\right]^2}=\dfrac{-2y(x+1)}{4(x+1)^2}=\dfrac{-y}{2(x+1)}$ ， $b^2=(\dfrac{-y}{2(x+1)})^2=\dfrac{y^2}{4(x+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{4(x+1)^2}=\dfrac{(1+x)(1-x)}{4(x+1)^2}=\dfrac{1-x}{4(x+1)}$ 。 由此可知 $b^2+a=\dfrac{1-x}{4(x+1)}+\dfrac{2x}{4(x+1)}=\dfrac{1}{4}$ ，所以 ω 的軌跡方程式 $y^2+x=\dfrac{1}{4}$ 。 【猜解】將 $z=x+yi$ ， $(x,y)=(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$ 代入，可得 $\omega=\dfrac{1}{4},\infty,\pm\dfrac{1}{2}i$ ，猜測為過 $(\dfrac{1}{4},0),(0,\dfrac{1}{2}),(0,-\dfrac{1}{2})$ 的拋物線 $y^2=-x+\dfrac{1}{4}$ 。  	104 嘉 義 女 中	8		A 0 2 3 2

1	已知數列$\langle a_n\rangle$ 滿足$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$ 。若$b_n=\frac{1}{1+a_n}$ ，且$S_n=\sum_{i=1}^{n}b_i$ ， $P_n=b_1\cdot b_2\cdot\ldots\ldots\cdot b_n$，則$P_n+\frac{1}{2}S_n=$ ？ 【解答】1 【詳解】$a_{n+1}=a_n^2+a_n=a_n(a_n+1)$，移項可得$a_n+1=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，倒數可得$b_n=\frac{1}{1+a_n}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 。 若將$a_{n+1}=a_n(a_n+1)$同時倒數，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(1+a_n)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+a_n}$ ，移項可得 $b_n=\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$ 。利用兩種不同形式的b_n代入S_n 與P_n ，所以 $S_n=\sum_{i=1}^{n}b_i=(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3})+\ldots+(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=2-\frac{1}{a_{n+1}}$ ； $P_n=b_1\cdot b_2\cdot\ldots\ldots\cdot b_n=\frac{a_1}{a_2}\times\frac{a_2}{a_3}\times\ldots\times\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2a_{n+1}}$ 。 所求$P_n+\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2a_{n+1}}+\frac{1}{2}(2-\frac{1}{a_{n+1}})=1$ 【猜解】猜結果為定值，代$n=1$，$b_1=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，$S_1=P_1=b_1=\frac{2}{3}$，得$P_1+\frac{1}{2}S_1=1$ 。	104 嘉 義 女 中	9			A 0 2 3 3

1	設 $p(x)$ 為一個實係數 n 次多項式。若 $(k+1)p(k)-k=0$ 對 $k=0,1,2,\dots,n$ 皆成立，則 $p(n+1)=$ ？ 【解答】 $p(n+1)=\begin{cases} 1 & ,n為奇數 \\ \dfrac{n}{n+2} & ,n為偶數 \end{cases}$ 【詳解】設 $Q(x)=(x+1)p(x)-x$ 為 $n+1$ 次多項式，顯然 $x=0,1,2,\dots,n$ 是 $Q(x)=0$ 的根，可再假設 $Q(x)=ax(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ ，所以 $Q(x)=(x+1)p(x)-x=ax(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ 。 當 $x=-1$ 代入， $(-1+1)p(-1)-(-1)=a(-1)(-1-1)(-1-2)\dots(-1-n)$ ，可得 $1=a(n+1)!\cdot(-1)^{n+1}$ ，所以 $a=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ ， $Q(x)=(x+1)p(x)-x=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ 。 $x=n+1$ 代入， $(n+1+1)p(n+1)-(n+1)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)(n+1-1)(n+1-2)\dots(n+1-n)$ ， $\Rightarrow (n+2)p(n+1)-(n+1)=(-1)^{n+1}$ ， $p(n+1)=\dfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$ ，當 n 為奇數，則 $p(n+1)=1$ ；n 為偶數，則 $p(n+1)=\dfrac{n}{n+2}$ 。	104 嘉義女中	1 0			A0234

1	已知函數 $f(x)=x^4-2x^2$，若以 $y=f(x)$ 上一點 $(a,f(a))$ 為切點的切線 L_a 與 $y=f(x)$ 恰有三個交點，則實數 a 的範圍為 ？ 【解答】$-1<a<1$ 且 $a\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【詳解】做 $f(x)$ 的圖形，由於切線與 $f(x)$ 恰有三交點，可知切點的 x 座標必在開區間 $(-1,1)$ 之間，使得切線在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)$ 三個區間內與 $y=f(x)$ 各交一點。因此可知 $-1<a<1$。 考慮函數之反曲點，$f''(x)=12x^2-4=0$，$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，過反曲點做切線只會與 $y=f(x)$ 交於兩點，因此 $a\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。	104 嘉 義 女 中	1 1			A 0 2 3 5

1	將一枚硬幣連續投擲 n 次。隨機變數 X 的定義為「若在投擲第 k 次時將首次出現正面，則 $X=k$。如果在 n 次的投擲中，正面一次都沒出現，則 $X=n$ 」。假設每次投擲硬幣時，出現正面的機率都是 p $(0<p<1)$，則隨機變數 X 的期望值 $E(X)$ 為？(請以 n、p 表示) 【解答】$\dfrac{1-(1-p)^n}{p}$ 【詳解】有擲出正面的次數期望值加上沒擲出的期望值 $=\left(\sum_{k=1}^{n}k(1-p)^{k-1}p\right)+n(1-p)^n$ 令 $S=\sum_{k=1}^{n}k(1-p)^{k-1}p=p+2(1-p)p+3(1-p)^2p+...+n(1-p)^{n-1}p$， $(1-p)S=(1-p)p+2(1-p)^2p+3(1-p)^3p+...+(n-1)(1-p)^{n-1}p+n(1-p)^np$， 兩式相減可得 $pS=p+(1-p)p+(1-p)^2p+...+(1-p)^{n-1}-n(1-p)^np$， 所以 $S=1+(1-p)+(1-p)^2+...+(1-p)^{n-1}-n(1-p)^n$ 。 所求 $=S+n(1-p)^n=1+(1-p)+(1-p)^2+...+(1-p)^{n-1}=\dfrac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}=\dfrac{1-(1-p)^n}{p}$	104 嘉義女中	12		A0236
1	若 $f(x)=x^2-x+b$ ，且 $f(\log_2 a)=b$ ，$\log_2(f(a))=2$ ，$a\neq1$，則滿足 $f(\log_2 x)>f(1)$ 且 $\log_2(f(x))<f(1)$ 的 x 的範圍為 ？ 【解答】$0<x<1$ 【詳解】由 $f(\log_2 a)=b$ 可知 $(\log_2 a)^2-(\log_2 a)+b=b$ ，$(\log_2 a)=0,1$ ，$a=1,2$ 。 但因題目條件中 $a\neq1$，所以可知 $a=2$ 。 $\log_2(f(a))=2\Rightarrow f(a)=4$，因 $f(a)=f(2)=2+b$，所以 $b=2$ ，$f(x)=x^2-x+2$ 。 因 $f(1)=2$，解 $f(\log_2 x)>2$，得 $\log_2 x>1$ 或 $\log_2 x<0$ ，$x>2$ 或 $x<1$，真數 $x>0$ 。 解 $\log_2(f(x))<2$，得 $0<f(x)<4$，再解 $0<x^2-x+2<4$，可知 $-1<x<2$ 。 因此所有範圍可得 $0<x<1$。	104 嘉義女中	13		A0237

1	實數x,y滿足$4x^2-5xy+4y^2=5$，若$s=x^2+y^2$，則 s 的最大值與最小值的和為？ 【解答】$\dfrac{160}{39}$ 【詳解】由$4x^2-5xy+4y^2=5$可知$xy=\dfrac{4(x^2+y^2)}{5}-1$，又因算幾不等式可知 $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}=\lvert xy\rvert$，所以$-\dfrac{x^2+y^2}{2}\leq xy\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}$。 解$-\dfrac{x^2+y^2}{2}\leq xy=\dfrac{4(x^2+y^2)}{5}-1\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}$，可得$\dfrac{10}{13}\leq x^2+y^2\leq\dfrac{10}{3}$，因此最大值與最小值之和為$\dfrac{10}{13}+\dfrac{10}{3}=\dfrac{160}{39}$。	104 嘉 義 女 中	1 4			A 0 2 3 8
1	已知橢圓$\Gamma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$與雙曲線$\Gamma_2:\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$有共同的焦點$F_1,F_2$，設 P 是$\Gamma_1,\Gamma_2$的一個交點。試證：$\Delta F_1PF_2$的面積$S_{\Delta F_1PF_2}=bn$。 【證明】以$\overline{F_1F_2}=2c$為底邊，求 P 點的 y 坐標，即為ΔF_1PF_2的高。 解聯立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1\end{cases}$，其中$a^2=b^2+c^2$，$c^2=m^2+n^2$，可得$(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{m^2}{n^2})y^2=a^2-m^2$。 所以$y^2=\dfrac{a^2-m^2}{(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{m^2}{n^2})}=\dfrac{b^2+c^2-(c^2-n^2)}{(\dfrac{b^2+c^2}{b^2}+\dfrac{c^2-n^2}{n^2})}=\dfrac{b^2+n^2}{\dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{n^2}}=\dfrac{b^2+n^2}{c^2(\dfrac{b^2+n^2}{b^2n^2})}=\dfrac{b^2n^2}{c^2}$ 可知$y=\pm\dfrac{bn}{c}$。面積$S_{\Delta F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}\lvert 2c\cdot y\rvert=\dfrac{1}{2}\left\lvert 2c\cdot\dfrac{bn}{c}\right\rvert=bn$。	104 嘉 義 女 中				A 0 2 3 9

1	設 $f(x)$ 為 x 的三次實係數多項式且 $f(x)$ 被其導函數 $f'(x)$除的餘式是常數。試證：$y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點個數只有一個。 【證明】令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，則 $f'(x)=3ax^2+bx+c$。 利用長除法可得 $f(x)=(\frac{1}{3}x+\frac{b}{9a})f'(x)+(\frac{2c}{3}-\frac{2b^2}{9a})x+(d-\frac{bc}{9a})$。因餘式為常數，所以 $(\frac{2c}{3}-\frac{2b^2}{9a})=0\Rightarrow\frac{6ac-2b^2}{9a}=0$，$b^2-3ac=0$ 若 $y=f(x)$的圖形與 x 軸有 2 或 3 個交點，則 $f'(x)=3ax^2+bx+c=0$需有相異實數解；但 $f'(x)=3ax^2+bx+c=0$的判別式$D=4(b^2-3ac)=0$，因此 $f'(x)=0$ 無相異實數解，因此 $y=f(x)$的圖形與 x 軸只有一個交點。 【另解】令 $f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$，則可令 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\cdot k(x-\gamma)+d$。 若 $f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$無實數解，則 $f'(x)>0$或 $f'(x)<0$，代表函數恆遞增或恆遞減，此時交點個數只有一個。 若 $f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$有相異實數解$\alpha,\beta$，則極值 $f(\alpha)=d$，$f(\beta)=d$，由均值定理可知存在$c\in(\alpha,\beta)$，使得 $f'(c)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{d-d}{\beta-\alpha}=0$，所以 c 也是 $f'(x)$的一個解，與 $f'(x)$為二次式矛盾。 若 $f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$有實數解$\alpha=\beta$，則可令 $f'(x)=a(x-\alpha)^2$，則 $f'(x)\ge 0$或 $f'(x)\le 0$代表函數恆遞增或恆遞減，此時交點個數只有一個。	104 嘉 義 女 中			A 0 2 4 0

1

ΔABC 中，若 a,b,c 為其三邊長。試證：$\dfrac{s^2}{4}<ab+bc+ca-\dfrac{2}{s}abc\le\dfrac{7}{27}s^2$，其中 $s=a+b+c$。

【證明】左式：同乘 s 並移項，可得 $\dfrac{1}{4}\left[s^3-4(ab+bc+ca)s+8abc\right]<0$。

$$\begin{aligned}&s^3-4(ab+bc+ca)s+8abc=(a+b+c)^3-4(ab+bc+ca)(a+b+c)+8abc\\&=a^3+b^3+c^3-a^2b-a^2c-ab^2-ac^2-b^2c-bc^2+2abc\\&=(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)\end{aligned}$$

利用三角形邊角關係，可知 $(a-b-c)<0,(a+b-c)>0,(a-b+c)>0$，因此乘積為負，$(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)<0$。

右式：令 k 為半周長 $k=\dfrac{s}{2}=\dfrac{a+b+c}{2}>0$，則原式可改為 $ab+bc+ca-\dfrac{abc}{k}\le\dfrac{28}{27}k^2$，同乘以 k，改證明 $k(ab+bc+ca)-abc\le\dfrac{28}{27}k^3$。

利用算幾不等式，$\dfrac{(k-a)+(k-b)+(k-c)}{3}\ge\sqrt[3]{(k-a)(k-b)(k-c)}$，左邊

$\dfrac{(k-a)+(k-b)+(k-c)}{3}=\dfrac{3k-(a+b+c)}{3}=\dfrac{\frac{3}{2}(a+b+c)-(a+b+c)}{3}=\dfrac{k}{3}$，因此

$\dfrac{k}{3}\ge\sqrt[3]{(k-a)(k-b)(k-c)}$，左右三次方可得 $\dfrac{k^3}{27}\ge(k-a)(k-b)(k-c)$，同加上 k^3，可得 $k^3+\dfrac{k^3}{27}\ge k^3+(k-a)(k-b)(k-c)$，

$$\Rightarrow\frac{28k^3}{27}\ge2k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc=2k^3-2k\cdot k^2+k(ab+bc+ca)-abc$$

$$\Rightarrow\frac{28k^3}{27}\ge k(ab+bc+ca)-abc$$

104 嘉義女中

A0241