國立嘉義女子高級中學104學年度第一次教師甄試【數學科】 初試(筆試)試題卷

時間：104/6/14(日) 10：30~12：00 計90分鐘。

說明：1.本試題卷共有2張2頁 計有17題。

2.可利用試題卷空白處書寫或計算。

3.試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

一、 填充題(每題5分，合計70分。所有答案均要化至最簡，否則不予計分。)

1. 已知$x\ge 0$，$y\ge 0$且滿足$\begin{cases} x+2y\le 5 \\ y\ge x^2-3x+2 \end{cases}$，則$z=x^2-6x+y^2-8y$的最小值為__________。

2. 已知數列$\langle a_n\rangle$的一般項$a_n=\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\tan 22^0}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\tan 23^0}\right)^n$，$n\in N$，則$a_{20}=$__________。

3. 設正數x、y、z滿足方程組$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{1}{3}y^2=25 \\ \dfrac{1}{3}y^2+z^2=9 \\ z^2+xz+x^2=16 \end{cases}$，則$xy+2yz+3zx=$__________。

4. 設多項式$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d$為常數$)$滿足$f(1)=1993$、$f(2)=3986$、$f(3)=5979$，則$\dfrac{1}{4}\big(f(11)+f(-7)\big)=$__________。

5. 設$a>b>c>1$，則$\log\dfrac{a}{c}(\log_{\frac{a}{b}}10+\log_{\frac{b}{c}}10)$的最小值為__________。

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+k}=$__________。

7. 設S是由曲面$z=x^2+y^2$與平面$z=4$所圍之立體，則S的體積$V_S=$__________。

8. 設複數z在複數平面上的對應點為單位圓$x^2+y^2=1$上的動點，令$\omega=\dfrac{1}{(1+z)^2}$，則$\omega$在複數平面上的對應點的軌跡方程式為__________。

9. 已知數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n$。若$b_n=\dfrac{1}{1+a_n}$且$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$、$P_n=b_1\cdot b_2\cdots b_n$，則$P_n+\dfrac{1}{2}S_n=$__________。

10. 設$p(x)$為一個實係數n次多項式。若$(k+1)p(k)-k=0$對$k=0,1,2,\cdots,n$皆成立，則$p(n+1)=$__________。

11. 已知函數$f(x)=x^4-2x^2$，若以$y=f(x)$上一點$(a,f(a))$為切點的切線L_a與$y=f(x)$恰有三個交點，則實數a的範圍為__________。

12. 將1枚硬幣連續投擲n次。隨機變數X的定義為「若在投擲第k次時首次出現正面，則$X=k$。如果在n次的投擲中，正面一次都沒出現，則$X=n$」。假設每次投擲硬幣時，出現正面的機率都是$p(0<p<1)$，則隨機變數X的期望值$E(X)$為__________。(請以n、p表示)

13. 若$f(x)=x^2-x+b$，且$f(\log_2 a)=b$，$\log_2(f(a))=2$，$a\ne 1$，則滿足$f(\log_2 x)>f(1)$且$\log_2(f(x))<f(1)$的x的範圍為__________。

14. 實數x、y滿足$4x^2-5xy+4y^2=5$，若$s=x^2+y^2$，則s的最大值與最小值的和為__________。

二、 計算證明題(每題 10 分，共 30 分)

1. 已知橢圓$\Gamma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$與雙曲線$\Gamma_2:\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$有共同的焦點$F_1$、$F_2$，設$P$是$\Gamma_1$、$\Gamma_2$的一個交點。試證:$\Delta F_1PF_2$的面積$S_{\Delta F_1PF_2}=bn$。

2. 設$f(x)$為x的三次實係數多項式且$f(x)$被其導函數$f'(x)$除的餘式是常數。試證：$y=f(x)$的函數圖形與x軸的交點個數只有一個。

3. ΔABC中，若a、b、c為其三邊長。試證：$\dfrac{s^2}{4}<ab+bc+ca-\dfrac{2}{s}abc\le\dfrac{7}{27}s^2$，其中$s=a+b+c$。