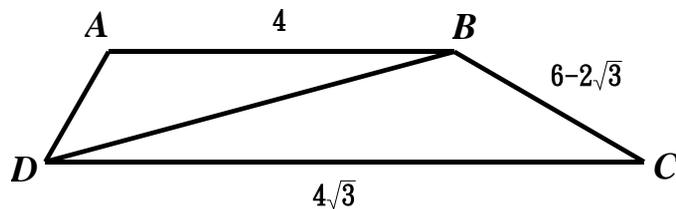


新竹市立成德高級中學 104 學年度教師甄試 數學科 試題卷

計算題:每題 10 分,共 100 分。(無計算過程不計分)

1. 如圖示梯形 ABCD 中, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6 - 2\sqrt{3}$, $\overline{CD} = 4\sqrt{3}$, 且 $\angle ADB + \angle CBD = 180^\circ$, 試求 \overline{AD} 、 \overline{BD} 的邊長分別為何? **Ans:** $\overline{AD} = 2(\sqrt{3} - 1)$, $\overline{BD} = 2\sqrt{6}$



2. 設實係數三次多項式函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + c + 1}{x^3 - 1} = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - k}{x^3 - 1} = 0$, 則數組 $(a, b, c, k) = ?$
Ans: $(-3, 6, -4, 3)$

3. 設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 分別在互相垂直的平面上, 若 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAC = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle BDC = 60^\circ$, 求 \overline{AD} 與 \overline{BD} 夾角的正弦值。 **Ans:** $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$

4. 設 $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 + 2n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$ 。若正整數 m 滿足 $|S_m - l| < \frac{1}{10000}$, 試求:

- (1) l 的值。 (2) m 的最小值。 **Ans:** (1) $\frac{1}{4}$ (2) 70

5. 設 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列, 且 $a_1 = 20$, $a_2 = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}i)$ 。若將 $\langle a_n \rangle$ 中是實數的項取出而構成一新的數列 $\langle b_n \rangle$, 試求 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的和。 **Ans:** $\frac{160}{9}$

6. 坐標平面上有一圓 $C: x^2 + y^2 + 2x = 1$, 若將圓 C 沿 x 軸推移 y 坐標的 -1 倍, 再對直線 $y = 3x$ 鏡射, 試求變換後新圖形的方程式。 **Ans:** $2x^2 + 2xy + 13y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$

7. 有一個三次函數 $f(x) = x^3 + ax + b$, 試證: 方程式 $f(x) = 0$ 有三相異實根的充要條件是 $\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} < 0$ 。

Ans: 略

8. 小明是某高中三年級文組班的學生, 五月的某一天, 小明拿著補習班發的指考數學乙模擬試卷中的數學問題來問老師, 說他在解一題關於最佳解的問題時, 整理之後得到一個目標函數: $f(x, y) = x + 2\sqrt{y}$, 且欲求此目標函數 $f(x, y)$ 在限制條件 $x + y \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 下的最大值, 以及此時的 x, y 值各為何?

請問您能幫高三文的小明解決這個問題嗎?

Ans: 當 $x = 2$, $y = 1$ 時, $f(x, y)$ 有最大值 4。

9. 一模型軌道電動車組, 在圓形的軌道上有 A, B 兩道關卡, 電動車由起點出發, 先經過 A 到 B 再回到原點, 不停繞圈繼續行進。假設車子每次經過 A 關卡被卡住不動的機率為 $\frac{1}{10}$, 在 B 關卡被卡住不動的機率為 $\frac{1}{21}$, 且在不考慮續航力的前提下(電力永遠足夠), 求此電動車環繞軌道圈數的期望值。

Ans: 6

10. 想要給 4×4 方格版塗上黑色和白色, 使得每一行或每一列正好有兩個黑色方格和兩個白色方格, 如下為其中兩個不同的例子: 請問共有多少種不同的方式?

Ans: 90

