<table>
<tr><td>1</td><td>設 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，m 表示 S 中任意兩個非空互斥子集合的總對數，若 m 除以 10000 的餘數為四位數 abcd，則 a+b+c+d 之值為何？

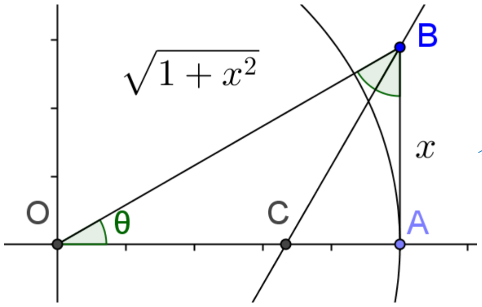
【解答】14
【詳解】設 A、B 為 S 中的兩個非空互斥子集，令 $C=S-A-B$，C 可為空集合，
則 S 中的元素必落在 A、B、C 三者之一，因此 $m=\dfrac{3^{10}-2^{10}-2^{10}+1}{2}$，計算方式為
(ABC 任選)-(A 為空)-(B 為空)+(AB 皆空)，因 AB 可互換再除以 2。
由於 $3^{10}=(3^5)^2=243^2=(200+43)^2\equiv 9049(\bmod 10000)$，或直接計算出 $3^{10}=59049$
$2^{10}=1024$，可知 $m=28501\equiv 8501(\bmod 10000)$，所以 a+b+c+d=8+5+0+1=14。</td><td>104
新
北
聯
招</td><td>選
擇
1</td><td></td><td>A
0
1
3
1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>下列何者對質數的敘述為真？(A)最大的質數大約是 $10^{2^{37}}$ 位數 (B)7663 為一質數
(C)存在一奇質數 p，使得 p 和 p+2 不互質 (D)對所有奇質數 p，存在整數對 (a,b) ，
使得 $6a+bp=3$ 成立。

【解答】D
【詳解】(A)質數有無限多個 (B) $7663=79\times97$ (C) $(p,p+2)=(2,p)=1$
(D) $bp=3(1-2a)$，故 $(a,b)=(\dfrac{1-p}{2},3)$ 為一組整數解。</td><td>104
新
北
聯
招</td><td>選
擇
2</td><td></td><td>A
0
1
3
2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>設直線 $y=kx+1$ 與曲線 $x^2+y^2+kx-y=4$ 的兩個交點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 對於直線 $y=x$ 對稱，且 $x_1\neq x_2$ ，則 $x_1+x_2+y_1+y_2=$？

【解答】2
【詳解】兩交點對稱於 $y=x$ ，且皆在直線 $y=kx+1$，可知 $y=kx+1$ 垂直 $y=x$ 。
故可解得 $k=-1$。
所求 $x_1+x_2+y_1+y_2=x_1+x_2+(-x_1+1)+(-x_2+1)=2$</td><td>104
新
北
聯
招</td><td>選
擇
3</td><td></td><td>A
0
1
3
3</td></tr>
</table>

1	設 $z_1,z_2,...,z_r$ 為方程式 $24x^{24}+\sum_{k=1}^{23}(24-k)(x^{24-k}+x^{24+k})=0$ 的所有相異根；並令 $z_k^2=a_k+ib_k(k=1,2,...,r)$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 a_k 與 b_k 均為實數。若 $\sum_{k=1}^{r}\lvert b_k\rvert=m+n\sqrt{p}$，其中 m,n,p 均為整數，且 p 不能被任何質數的平方整除，則 $m+n+p=$？ 【解答】15 【詳解】令 $f(x)=24x^{24}+\sum_{k=1}^{23}(24-k)(x^{24-k}+x^{24+k})=0$，展開可得 $f(x)=x+2x^2+3x^3+...+23x^{23}+24x^{24}+23x^{25}+22x^{26}+...+x^{47}=0$，對稱於 x^{24} 項 則 $xf(x)=f(x)=x^2+2x^3+3x^4+...+23x^{24}+24x^{25}+23x^{26}+22x^{27}+...+x^{48}$，兩式相減 可得 $(x-1)f(x)=-x-x^2-x^3-...-x^{24}+x^{25}+x^{26}+...+x^{48}=(x^{24}-1)(x+x^2+...+x^{24})$ 所以 $f(x)=\dfrac{(x^{24}-1)(x+x^2+...+x^{24})}{x-1}=x(1+x+x^2+...+x^{23})^2$ $f(x)=0$ 的相異根有 24 個，包含 $x=0$，以及使得 $1+x+x^2+...+x^{23}=0$ 的 23 個根 $z_1,z_2,...z_{23}$，而 $1+x+x^2+...+x^{23}=0$ 為 $x^{24}-1=0$ 中不為 1 的所有根，因此 $z_k=\cos\frac{k\pi}{12}+i\sin\frac{k\pi}{12},k=1,2,....,23$，$z_k^2=\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6},k=1,2,...,23$ 所求 $\sum_{k=1}^{r}\lvert b_k\rvert=\sum_{k=1}^{23}\left\lvert\sin\frac{k\pi}{6}\right\rvert=4\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0)-0=8+4\sqrt{3}$ (6 個一組循環計算)，故 $m+n+p=8+4+3=15$。	104 新 北 聯 招	選 擇 4		A 0 1 3 4

1	有一圓半徑為 1，圓心為 O，線段 $\overline{AB}$ 切圓於 A，已知 $\angle AOB=\theta$ ，若 $\angle ABO$ 之角平分線 $\overline{BC}$ 交 $\overline{OA}$ 於 C，則 $\overline{OC}$ 長為？$(A)\sec\theta-\tan\theta$ $(B)\dfrac{\tan\theta}{1+\sin\theta}$ $(C)\dfrac{1}{1+\sin\theta}$ (D)以上皆非。 【解答】C 【詳解】令 $\overline{AB}=\tan\theta=x$，$\overline{OB}=\sqrt{1+x^2}$， 則由角平分線性質可知 $\overline{OC}:\overline{CA}=\sqrt{1+x^2}:x$。 因 $\overline{OA}=1$，可知 $\overline{OC}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x}\overline{OA}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$。 【猜解】設 $\theta=30^\circ$，易求得此時 $\overline{OC}=\dfrac{2}{3}$，僅(C) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}$ 符合。	104新北聯招	選擇5		A0135



<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>

已知 P 為正方形 ABCD 內部一點，若 $\overline{AP}=7,\overline{BP}=5,\overline{CP}=1$，則正方形 ABCD 之面積為？

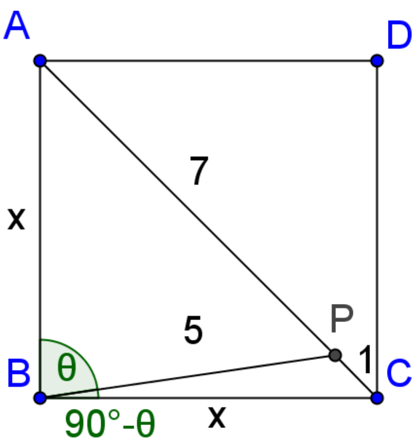
【解答】32

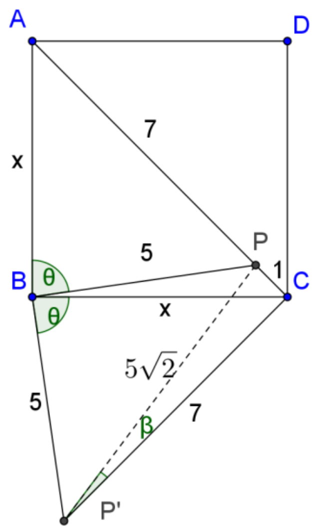
【詳解】設正方形邊長為 x， $\angle ABP=\theta,\angle PBC=90^\circ-\theta$ 。

利用餘弦定理可知 $\cos\theta=\frac{5^2+x^2-7^2}{2\cdot5\cdot x}$ ， $\cos(90^\circ-\theta)=\frac{5^2+x^2-1^2}{2\cdot5\cdot x}=\sin\theta$ 。

再利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，解 $(\frac{5^2+x^2-7^2}{2\cdot5\cdot x})^2+(\frac{5^2+x^2-1^2}{2\cdot5\cdot x})^2=1$，可令 $x^2=t>0$ 進行化簡，得到 $t^2-50t+576=0$ ， $t=32or18$ 。

由於 P 在正方形 ABCD 內部，因此 P 到頂點距離小於正方形對角線， $\sqrt{2}x>\overline{PA}$ ，可知 $x^2>\frac{49}{2}$ ，取 $t=x^2=32$ 。

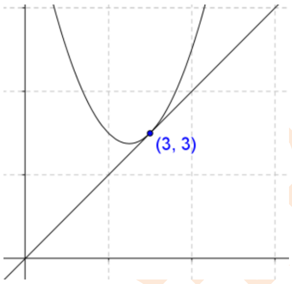




【另解】如圖右，將 P 點順時針旋轉 90° 至 P' ，則可知 $\Delta PBP'$ 為等腰直角三角形， $\overline{PP'}=5\sqrt{2}$ 。再令 $\angle CP'P=\beta$ ，由餘弦定理求出 $\cos\beta=\frac{(5\sqrt{2})^2+7^2-1^2}{2\cdot5\sqrt{2}\cdot7}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$ 。

所求 $x^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cdot\cos(45^\circ+\beta)=25+49-70\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{10}\right]=32$

</td>
<td>104
新
北
聯
招</td>
<td>填
充
1</td>
<td></td>
<td>A
0
1
3
6</td>
</tr>
</table>

1	若拋物線 $y=x^2+(a+1)x+b$ (其中 a,b 為固定的實數)，在 x=3 時，y=3，且對任意的實數 x 恆滿足 $y\ge x$ ，則此拋物線的頂點到原點的距離為？ 【解答】$\frac{\sqrt{221}}{4}$  【詳解】將(3,3)代入 $y=x^2+(a+1)x+b$ ，可知 $9+3a+b=0$ 。 對任意的實數 x 恆滿足 $y\ge x$ ，代表 $y=x^2+(a+1)x+b\ge x \Rightarrow x^2+ax+b\ge 0$ 。前述 x=3 時，y=3，拋物線通過 $y=x$ 線上，所以可知 $(3,3)$ 是拋物線與直線 $y=x$ 相切的點，因此 $x^2+ax+b=0$ ，判別式 $D=a^2-4b=0$ ，可知 $a^2=4b$ 。 解聯立 $\begin{cases} 9+3a+b=0 \\ a^2=4b \end{cases} \Rightarrow a^2+12a+36=0$ ，得 $a=-6,b=9$，拋物線為 $y=x^2-5x+9$ 。 此拋物線頂點為 $(\frac{10}{4},\frac{11}{4})$ ，與原點距離為 $\frac{\sqrt{10^2+11^2}}{4}=\frac{\sqrt{221}}{4}$	104 新 北 聯 招	填 充 2		A 0 1 3 7
1	若 $f(x,y)=x^2y$ ，則在平面 $x+2y=2$ 上， $f(x,y)$ 的最大值與最小值之和為？ 【解答】$\frac{16}{27}$ 【詳解】由柯西不等式可知 $\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2y}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{x^2y}{2}}$ ，因此最大值發生在 $\frac{x}{2}=2y$ 時，此時 $x=\frac{4}{3}$ ， $y=\frac{1}{3}$ ， $f(x,y)$ 最大值為 $\frac{16}{27}$ 。 因此此題應加上 x,y 為非負實數之條件，答案方為 $\frac{16}{27}$ 。	104 新 北 聯 招	填 充 3		A 0 1 3 8

1	已知$\alpha>0$，且$\sqrt[3]{2+\sqrt{\alpha}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\alpha}}$為一正整數，求$\alpha=$？ 【解答】5 或$\frac{100}{27}$ 【詳解】令$A=\sqrt[3]{2+\sqrt{\alpha}},B=\sqrt[3]{2-\sqrt{\alpha}}$，$\sqrt[3]{2+\sqrt{\alpha}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{\alpha}}=A+B=K$為一正整數， 則$A^3+B^3=4=(A+B)(A^2-AB+B^2)=K\left[K^2-3AB\right]$， 移項可得$AB=\frac{K^3-4}{3K}=\frac{K^2}{3}-\frac{4}{3K}$，為一遞增函數。 又$(AB)^3=(2+\sqrt{\alpha})(2-\sqrt{\alpha})=4-\alpha<4$，$AB=\sqrt[3]{4-\alpha}<\sqrt[3]{4}<2$ 因題意可知為一正整數，由$A+B=1$ 開始代起： $A+B=1$，$4=1\cdot\left[1^2-3\sqrt[3]{4-\alpha}\right]$，可解得$\sqrt[3]{4-\alpha}=-1$，$4-\alpha=-1$，$\alpha=5$； $A+B=2$，$4=2\cdot\left[2^2-3\sqrt[3]{4-\alpha}\right]$，可解得$\sqrt[3]{4-\alpha}=\frac{2}{3}$，$4-\alpha=\frac{8}{27}$，$\alpha=\frac{100}{27}$； $A+B=3$，$4=3\cdot\left[3^2-3\sqrt[3]{4-\alpha}\right]$，可解得$\sqrt[3]{4-\alpha}=\frac{23}{9}$，$\alpha=4-(\frac{23}{9})^3<0$不合。 且由於當$A^3+B^3$固定時，$A+B$、$AB$遞增，則$\alpha=4-(AB)^3$遞減，因此後續的答案皆不合$\alpha>0$的條件，所以$\alpha=5$或$\frac{100}{27}$。	104新北聯招	填充4		A0139

<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>假設 $a=\sqrt{2}+1$ ，$b=\dfrac{\sin\frac{7}{16}\pi}{\sin\frac{3}{16}\pi}$ ，$c=\dfrac{\sin\frac{5}{16}\pi}{\sin\frac{1}{16}\pi}$ 。比較 a,b,c 大小為何？

【解答】$b<a<c$

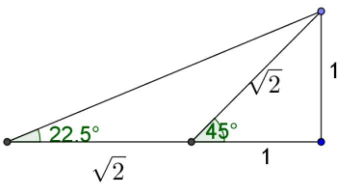
【詳解】觀察 b,c，分子分母角度都差 $\frac{4\pi}{16}$ ，

故令 $b=\dfrac{\sin(\frac{4}{16}\pi+\frac{3}{16}\pi)}{\sin\frac{3}{16}\pi}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{3}{16}\pi+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{3}{16}\pi}{\sin\frac{3}{16}\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1+\cot\frac{3}{16}\pi)$ ，同理可將

$c=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1+\cot\frac{1}{16}\pi)$ 。

將 $a=\sqrt{2}+1$ 化為相同型式 $a=\sqrt{2}+1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2+\sqrt{2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(1+\sqrt{2})\right]$ ，解

$\cot\theta=1+\sqrt{2}$ ，由圖可知 $\theta=22.5^\circ=\frac{2\pi}{16}$ ，因此 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1+\cot\frac{2}{16}\pi)$ 。



因第一象限內 $\cot x$ 遞減，可得 $c>a>b$ 。</td>
<td>104
新
北
聯
招</td>
<td>填
充
5</td>
<td></td>
<td>A
0
1
4
0</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>實係數多項式 $p(x)=x^n-ax^{n-1}+...+bx^1+(-2)^n$ ，已知 $p(x)=0$ 的 n 個根皆為正實數。
當 $a=2n$ 時，求 $b=$ ？

【解答】$n(-2)^{n-1}$

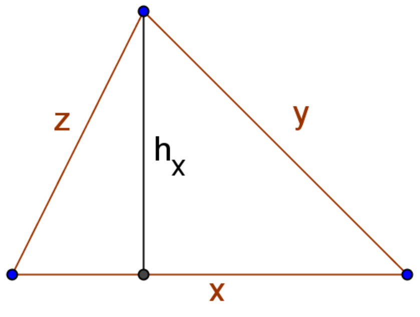
【詳解】 設 n 個正根 $x_1,x_2,...,x_n$ ， $p(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ ，

可知 $a=x_1+x_2+...+x_n=2n$ ，常數項 $(-1)^n x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n=(-2)^n\Rightarrow x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n=2^n$

由算幾不等式可知 $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=\frac{2n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}=2$ ，等號成立時，

$x_1=x_2=...=x_n=2$ 。

因此 n 個根皆為 2，求 $(x-2)^n$ 中 x 項係數為 $n(-2)^{n-1}$ 。</td>
<td>104
新
北
聯
招</td>
<td>填
充
6</td>
<td></td>
<td>A
0
1
4
1</td>
</tr>
</table>

1	已知存在一正整數 n，使得 $\frac{n}{10}<\cos\frac{3}{5}<\frac{n+1}{10}$ 。求 n= ？ 【解答】8 【詳解】利用泰勒展開式 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+.....$ 由前兩項可知 $\cos\frac{3}{5}>1-2\cdot(\frac{3}{5})^2=\frac{82}{100}$ ， 由前三項可知 $\cos\frac{3}{5}<1-2\cdot(\frac{3}{5})^2+\frac{1}{4!}\cdot(\frac{3}{5})^2=\frac{82}{100}+\frac{54}{10000}$ 因此可知 $\frac{8}{10}<\cos\frac{3}{5}<\frac{9}{10}$ ，n=8。 【備註】前兩項求出來大概就可以寫答案了。	104 新 北 聯 招	填 充 7		A 0 1 4 2
1	設正實數 x,y,z 滿足 $x=\sqrt{y^2-\frac{1}{49}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{49}}$ ， $y=\sqrt{x^2-\frac{1}{64}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{64}}$ ， $z=\sqrt{x^2-\frac{1}{81}}+\sqrt{y^2-\frac{1}{81}}$ ，則 $x+y+z=$ ？ 【解答】 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 【詳解】設三角形三邊長為 x,y,z ，三高 h_x,h_y,h_z 分別為 $\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}$ ，則必可滿足題目 條件  令 $x=7t,y=8t,z=9t$ ，代海龍公式可知面積為 $12\sqrt{5}t^2$ ，而面積也可用 $\frac{1}{2}x\cdot h_x=\frac{t}{2}$ 求 得，因此 $t=\frac{1}{24\sqrt{5}}$ ， $x+y+z=24t=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 。	104 新 北 聯 招	填 充 8		A 0 1 4 3

1

給定矩陣 $A=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 4 & -2\end{bmatrix}$，若存在么正矩陣 U (Unitary Matrix)及三角矩陣 T (Triangular Matrix)使得 $U^{-1}AU=T$，則 $U=$？$T=$？

【解答】$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 0 & 1\end{bmatrix}$(此題答案應該有兩個，絕對不只一個)

【詳解】Schur 分解：任一 $n\times n$ 階矩陣 A 可分解為 $A=UTU^{-1}$，其中 U 是么正矩陣，T 是上三角矩陣。

若么正矩陣的元素都是實數，其即為正交矩陣（orthogonal matrix）。

正交矩陣 Q，$Q^T=Q^{-1}\Leftrightarrow Q^TQ=QQ^T=I$。

先解 $\begin{vmatrix}5-\lambda & -3\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$，$\lambda^2-3\lambda+2=0, \lambda=1,2$。

取 $\lambda=2$，長度為 1 的一個特徵向量為 $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，可得 $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=U^{-1}$

$$T=U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

若取 $\lambda=1$，長度為 1 的一個特徵向量為 $\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}$，可得 $U=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}=U^{-1}$

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

104 新北聯招	填充 9		A0144

1	在環 $Z[x]$ 上，因式分解 $x^5+x^4+4x^3+7x^2+9x+18$？ 【解答】$(x^2+x+3)(x^3+x+6)$ 【詳解】五次式分解後必有一次數≤ 2的因式，而以一次因式檢驗法可知此式無一次因式，因此可設$(x^2+ax+1)(x^3+bx^2+cx+18)$、$(x^2+ax+3)(x^3+bx^2+cx+6)$或$(x^2+ax+2)(x^3+bx^2+cx+9)$進行檢驗。	104新北聯招	填充10		A0145