

新北市立高級中等學校 104 學年度教師聯合甄選

數學科 試題

一、選擇題：20%，每題 4 分

1. 設 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ， m 表示 S 中任意兩個非空互斥子集合的總對數，若 m 除以 10000 的餘數為四位數 $abcd$ ，則 $a+b+c+d$ 之值為何？
(A) 14
(B) 13
(C) 12
(D) 10
2. 下列何者對質數的敘述為真？
(A) 最大的質數大約是 $10^{2^{37}}$ 位數
(B) 7663 為一質數
(C) 存在一奇質數 p ，使得 p 和 $p+2$ 不互質
(D) 對所有奇質數 p ，存在整數對 (a, b) ，使得 $6a + bp = 3$ 成立
3. 設直線 $y = kx + 1$ 與曲線 $x^2 + y^2 + kx - y = 4$ 的兩個交點 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 對於直線 $y = x$ 對稱，且 $x_1 \neq x_2$ ，則 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = ?$
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
4. 設 z_1, z_2, \dots, z_r 為方程式 $24x^{24} + \sum_{k=1}^{23} (24-k)(x^{24-k} + x^{24+k}) = 0$ 的所有相異根；並令 $z_k^2 = a_k + ib_k$ ($k=1, 2, \dots, r$)，其中 $i = \sqrt{-1}$ 且 a_k 與 b_k 均為實數。若 $\sum_{k=1}^r |b_k| = m + n\sqrt{p}$ ，其中 m, n, p 均為整數，且 p 不能被任何質數的平方整除，則 $m+n+p = ?$
(A) 12
(B) 15
(C) 18
(D) 21

5. 有一圓半徑為1，圓心為 O ，線段 \overline{AB} 切圓於 A ，已知 $\angle AOB = \theta$ ，若 $\angle ABO$ 之角平分線 \overline{BC} 交 \overline{OA} 於 C ，則 \overline{OC} 長為？
- (A) $\sec \theta - \tan \theta$
 (B) $\frac{\tan \theta}{1 + \sin \theta}$
 (C) $\frac{1}{1 + \sin \theta}$
 (D) 以上皆非

二、填充題：80%，每題 8 分

1. 已知 P 為正方形 $ABCD$ 內部一點，若 $\overline{AP} = 7$ ， $\overline{BP} = 5$ ， $\overline{CP} = 1$ ，則正方形 $ABCD$ 之面積為_____。
2. 若拋物線 $y = x^2 + (a+1)x + b$ (其中 a, b 為固定的實數)，在 $x = 3$ 時， $y = 3$ ，且對任意的實數 x 恆滿足 $y \geq x$ ，則此拋物線的頂點到原點的距離為_____。
3. 若 $f(x, y) = x^2 y$ ，則在平面 $x + 2y = 2$ 上， $f(x, y)$ 的最大值與最小值之和為_____。
4. 已知 $\alpha > 0$ ，且 $\sqrt[3]{2 + \sqrt{\alpha}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\alpha}}$ 為一正整數，求 $\alpha = ?$
5. 假設 $a = \sqrt{2} + 1$ ， $b = \frac{\sin \frac{7}{16}\pi}{\sin \frac{3}{16}\pi}$ ， $c = \frac{\sin \frac{5}{16}\pi}{\sin \frac{1}{16}\pi}$ 。比較 a, b, c 大小為何？
6. 實係數多項式 $p(x) = x^n - ax^{n-1} + \dots + bx^1 + (-2)^n$ ，已知 $p(x) = 0$ 的 n 個根皆為正實數。當 $a = 2n$ 時，求 $b = ?$

7. 已知存在一正整數 n ，使得 $\frac{n}{10} < \cos \frac{3}{5} < \frac{n+1}{10}$ 。求 $n = ?$

8. 設正實數 x 、 y 、 z 滿足

$$x = \sqrt{y^2 - \frac{1}{49}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{49}}, \quad y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{64}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{64}}, \quad z = \sqrt{x^2 - \frac{1}{81}} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{81}},$$

則 $x + y + z = ?$

9. 給定矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ，若存在么正矩陣 U (Unitary Matrix) 及三角矩陣 T (Triangular Matrix) 使得 $U^{-1}AU = T$ ，則 $U = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $T = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 在環 $\mathbb{Z}[x]$ 上，因式分解 $x^5 + x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 9x + 18$: $\underline{\hspace{2cm}}$