國立玉井工商 104 學年度第一次教師甄試題目卷

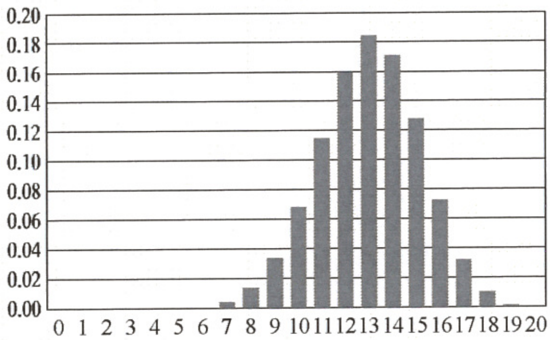
考試科目：數學科

一、複選題(全對才給分)(每題 4 分，共 16 分)

1. 設 $p(x)$ 為一個八次多項式，若 $p(n)=\dfrac{1}{n}$，$n=1, 2, 3, \cdots, 9$，則下列敘述何者正確?
(1)方程式 $xp(x)-1=0$ 恰有 9 個整數根　(2) $p(x)$ 的 x^7 項係數為 -45
(3) $p(10)=\dfrac{1}{10}$　(4) $p(11)=1$.

2. 設 $f(x)=\dfrac{(2^x-8)(7^x-1)}{(\log_2 x-3)(5^x+2)}$．當 a 為下列哪些值時，會使得 $f(a)<0$？
(1) $\sqrt{13}$　(2)圓周率 π　(3) $3^{\sqrt{2}}$　(4) $\log 500$.

3. 下圖是參數為 $X\sim B(20,p)$ 的二項分布（即重複做成功機率為 p 的伯努利試驗 20 次，其中成功的次數為 X）的機率分布圖：



若期望值為 $E(X)$，請選出正確的選項：
(1) $0.5 < p < 0.6$
(2) $0.6 < p < 0.7$
(3) $E(X)=13$
(4) X 的標準差小於 4 .

4. 已知 $\{z_n\}$ 為複數等比數列，且 $z_1=2$，$z_2=a+bi$，$z_3=b+ai$，其中 a，b 為實數且 $a>0$．選出正確的選項：　(1) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) z_{10} 為實數　(3) $z_{12}\cdot z_{14}=4$
(4)數列前 12 項的和 $z_1+z_2+\cdots+z_{12}=0$.

二、填充題(每格 3 分，共 60 分)

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+3}}-\sqrt{3}}{x-1}=?$

2. 已知二次函數 $f(x)=9\times\dfrac{(x-5)(x-7)}{(1-5)(1-7)}+9\times\dfrac{(x-1)(x-7)}{(5-1)(5-7)}-6\dfrac{(x-1)(x-5)}{(7-1)(7-5)}$，

   則 $f(x)$ 最大值為？

3. 設坐標平面上兩點 $A(0,9)$、$B(0,12)$，若點 A'、B' 在直線 $y=x$ 上，

   且 $\overline{AA'}$ 與 $\overline{BB'}$ 交於點 $C(2,8)$，試求 $\overline{A'B'}$ 的長度為?

4. 設 x 為任意實數，求 $y=\dfrac{3+\sin x}{2-\cos x}$ 的範圍為?

5. 甲箱內有 2 白球，乙箱內有三紅球，現在每次自各箱中隨機取一個球交換，令 k_i 表有 i 個紅球在甲箱內之事件，求在交換二次後，有二紅球在甲箱內之機率為?

6. 一列火車有 10 節車廂，設計師依下列條件來規劃:

   (1)在其中兩節車廂設立無障礙座位，此兩車廂要相鄰；

   (2)在其中 5 節車廂設有廁所，設立廁所的車廂彼此不相鄰；

   (3)在其中 3 節車廂設立販賣機，但不能與廁所設在同一車廂；

   若同時依照此三條件，這列火車有幾種的配置方式？

7. 設 A 二階方陣，滿足 $A\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$，求矩陣 $A^8=?$

8. 設 A、B、C、D 為數線上四相異點，P、Q 分別在 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AP}=\dfrac{1}{3}\overline{AD}$，

   $\overline{BQ}=\dfrac{1}{3}\overline{BC}$ 。 若 $\overline{PQ}=1$，求 $2\overline{AB}+\overline{CD}$ 的最小值?

9. 已知三次函數 $f(x)=x^3+6x^2+13x+\int_0^2 f(x)\,dx$， 求 $f(x)=?$

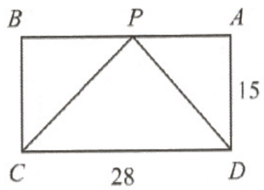
10. 空間中有四點，$A(0,1,0)$，$B(4,6,3)$，$C(1,2,1)$，$D(1,-2,-3)$，求包含 $\overline{AB}$ 且

    平分四面體 $ABCD$ 之平面方程式?

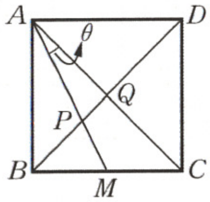
11. 由兩曲線 $y=2x^2$，$y=4x$ 所圍之區域為 S，則區域 S 繞 x 軸一周所得的旋轉體體積為？

12. 如右圖為一長 28，寬 15 的長方形 $ABCD$，P 為 $\overline{AB}$ 上一點．

    已知 $\overline{CP}$ 比 $\overline{DP}$ 多 8 單位長，求 $\overline{AP}$ 長 $=?$

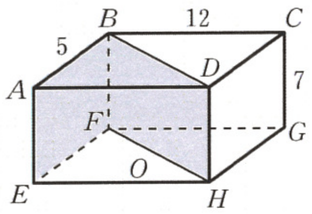


13. 如附圖，正方形 $ABCD$，M 為 $\overline{BC}$ 的中點，$\angle MAC=\theta$，則 $\tan\theta=$？



14. 設 $ABCD$-$EFGH$ 為一長方體（如圖），其中 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{CG}=7$，

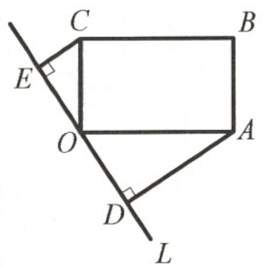
設半平面 $ABFE$ 與半平面 $BDHF$ 所成二面角的度量 θ，求 $\sin\theta$ 之值＝？



15. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項 $a_1=1$，且滿足 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n-1}}+2n$，$n\geq 2$，則 $a_{20}=$？

16. 求 $\left(\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{12}=$？

17. 如圖，$OABC$ 為一矩形，$\overline{AD}\perp L$，$\overline{CE}\perp L$．若 $\overline{OD}=5$，$\overline{OE}=2$，求 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=$？



18. $A(1,0)$、$B(-1,0)$、圓 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上一點 P，求 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 之最大值？

19. 若多項式 $a(3x-5)^5+b(3x-5)^4+c(3x-5)^3+d(3x-5)^2+e(3x-5)+k$

$=(5x+1)^5-4(5x+1)^4-72(5x+1)^3-56(5x+1)^2+15(5x+1)+10$，

a, b, c, d, e, k 為實數，試求 $a+b+c+d+e+k=$？

20. 求極限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=$？

三、計算題(每題 8 分，共 24 分)

1. 若 x 、 y 、 z 為正數，則方程組 $\begin{cases} \dfrac{2x}{x-1}=y \\ \dfrac{3y-3}{y-2}=z \\ \dfrac{z+3}{z-3}=x \end{cases}$ 的解 $(x,y,z)=$?

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 60°$，且最大邊與最小邊為方程式 $3x^2-21x+13=0$ 的兩根，則 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為?

3. x ， $y \in R$ ， $x+y=x^2+y^2$ ，求 x^3+y^3 的最大值及最小值。