國立清水高級中學 99 學年度第一學期第一次正式及代理教師甄選
數學科筆試試卷

說明：1、本試卷共十題，每題十分。
　　　2、請將答案寫在答案卷上，並寫計算過程，只有答案不計分。
　　　3、不必抄題，請標明題號作答（可不依題目順序作答）

一、設 m 為正整數，$a_0, a_1, \cdots, a_m$ 為實數數列，其中 $a_0 = 37,\ a_1 = 72,\ a_m = 0$，若對所有的 $k = 1, 2, \cdots, m-1$ 滿足 $a_{k+1} = a_{k-1} - \dfrac{3}{a_k}$，則 $m =$________。 889

二、$f(x) = \dfrac{100x\cos x}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+100)}$，求 $f'(0)$. $\dfrac{1}{99!}$

三、設某班抽樣 8 位同學的數學成績(x)與英文成績(y)，得平均數、標準差與相關係數如下：$\overline{x} = 65,\ \overline{y} = 70,\ S_x = 10,\ S_y = 5,\ r = 0.8$。若班上某位學生的數學成績為 60 分，則此學生英文的預測成績為________分。 68

四、若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，求 A^{50}. $\begin{bmatrix} \frac{2^{51}+1}{3} & \frac{2^{50}-1}{3} \\ \frac{2^{51}-2}{3} & \frac{2^{50}+2}{3} \end{bmatrix}$

五、若 $\lim\limits_{n\to\infty}(5n - \sqrt{an^2 - bn + c}) = 2$，則數對 $(a, b) =$________。 $(25, 20)$

六、求與 $y = x^2,\ y = -\dfrac{4}{9}x^3 + 2x - 1$ 兩函數圖形皆相切的所有切線方程式.

$y = 2x - 1$
$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$
$y = -10x - 25$

七、設 θ_1, θ_2 為滿足方程式 $\sqrt{2}\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta = 1$ 的兩角度，且 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$，則 $\tan(\theta_1 + \theta_2) =$________。 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

八、在半徑為 1 的圓上作內接正六邊形 ABCDEF，在 6 個頂點中任取相異 3 點作三角形的頂點，則此三角形周長的期望值為何？ $\dfrac{12+6\sqrt{3}}{5}$

九、3.設拋物線 $y^2 = 2px$ 的焦點 F，若焦弦 $\overline{AB}$ 滿足：$\overline{AF} = m$，$\overline{BF} = n$，試證：$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{p}$。

十、某樓梯有 10 階，小清自底部以每次 1 或 2 或 3 階方式向上，問共有幾種方式爬到頂端？ 274