

1	<p>設 <math>a_n = \sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)}</math>，求 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}</math> 之值為？</p> <p><b>【解答】</b> <math>\frac{1}{2}</math></p> <p><b>【詳解】</b> <math>a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k(k+1)}</math>，<math>\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k^2} &lt; a_n &lt; \sum_{k=1}^n \sqrt{(k+1)^2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}</math></p> <p>所求 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{(k+1)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{1}{2}</math>，所以 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2}</math></p>	104 全國 聯招	單 選 1	A 0 1 0 2
1	<p>試問 <math>\underbrace{888\dots88}_{\text{共有 } 2015 \text{ 個 } 8}</math> 被 13 除的餘數為？</p> <p><b>【解答】</b> 7</p> <p><b>【詳解】</b> 利用 <math>1001 = 13 \times 77</math>，可知 <math>888888 = 8 \times 111111 = 8 \times 1001 \times 111</math> 為 13 的倍數。</p> <p><math>2015 \equiv 5 \pmod{13}</math>，因此只要計算五個 8 被 13 除的餘數</p> <p><math>8 \times 11111 = 8 \times (1001 \times 11 + 100)</math>，<math>800 \equiv 9 \times 8 \equiv 7 \pmod{13}</math></p>	104 全國 聯招	單 選 2	A 0 1 0 3
1	<p>設 <math>\triangle ABC</math> 中，<math>\overline{AB} = 6, \overline{AC} = 4, \overline{BC} = 2\sqrt{7}</math>，<math>\angle A</math> 的內角平分線交 <math>\overline{BC}</math> 於 <math>D</math>，<math>\overline{AB}</math> 邊上的高為 <math>\overline{CH}</math>，且 <math>\overline{AD}</math> 交 <math>\overline{CH}</math> 於 <math>P</math>，若 <math>\overline{BP} = \alpha \overline{BA} + \beta \overline{BC}</math>，則數對 <math>\alpha + \beta =</math> ？</p> <p><b>【解答】</b> <math>\frac{7}{9}</math></p> <div data-bbox="255 1321 702 1680" data-label="Diagram"> </div> <p><b>【詳解】</b> 設 <math>\overline{CH} = h, \overline{AH} = x</math>，解</p> <p><math>h^2 = 4^2 - x^2 = (2\sqrt{7})^2 - (6-x)^2</math>，可知 <math>\overline{CH} = h = 2\sqrt{3}, \overline{AH} = x = 2</math>。</p> <p>因此 <math>\overline{BH} : \overline{HA} = 2 : 1</math>，利用角平分線性質有 <math>\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2</math>，利用共線性質可解出</p> $\overline{BP} = \frac{4}{9} \overline{BA} + \frac{3}{9} \overline{BC}$	104 全國 聯招	單 選 3	A 0 1 0 4

1	<p>已知 <math>f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + c</math>，若 <math>f(x) = 0</math> 的三根為 <math>\alpha, \beta, \gamma</math>，且 <math>f(-1) = 1</math>，則</p> $\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{vmatrix} = ?$ <p><b>【解答】</b> -5</p> <p><b>【詳解】</b> <math>\begin{vmatrix} 1+\alpha &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1+\beta &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; 1+\gamma \end{vmatrix} = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) + 2 - 3 - (\alpha + \beta + \gamma)</math></p> $= -f(-1) - (\alpha + \beta + \gamma) - 1 = -1 - 3 - 1 = -5。$	104 全國 聯招	單 選 4	A 0 1 0 5
1	<p>甲、乙、丙三人共同租一間房間，週一至週六每天抽籤決定一個人打掃，若規定同一個人不可以連著兩天打掃，則每一個人至少排到一天之機率最接近以下何者？</p> <p>(A)0.9 (B)0.92 (C)0.94 (D)0.96</p> <p><b>【解答】</b> C</p> <p><b>【詳解】</b> 設天數為 <math>n</math>，同一人不可連兩天打掃，方法數為 <math>a_n</math>，則 <math>a_1 = 3, a_2 = 6</math>，  <math>a_n = 3 \times 2^{n-1}</math>。所以 <math>a_6 = 96</math></p> <p>每人至少排到一天，用全部扣掉只有某兩人打掃的情況。</p> <p>例如丙沒排到，只有甲和乙，可以是(甲乙甲乙甲乙)或(乙甲乙甲乙甲)。</p> <p>全部共有 6 種情況是只有兩人打掃。</p> <p>所求機率為 <math>1 - \frac{6}{96} = 0.9375</math>。</p>	104 全國 聯招	單 選 5	A 0 1 0 6
1	<p>一數列 <math>\langle a_n \rangle</math>，若 <math>a_1 = 1</math> 且 <math>\forall n \in N, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2</math>，求 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n</math> 的值為？</p> <p><b>【解答】</b> 3</p> <p><b>【詳解】</b> 設 <math>a_{n+1} - k = \frac{1}{3}(a_n - k)</math>，解得 <math>k = 3</math>。</p> <p>令 <math>b_{n+1} = a_{n+1} - 3</math>，則 <math>b_{n+1} = (\frac{1}{3})^n b_1 = -2 \cdot (\frac{1}{3})^n</math>，<math>a_n = b_n + 3 = 3 - 2 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}</math>。</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1} = 3</math>。</p> <p><b>【速解】</b> 令 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x</math>，解 <math>x = \frac{1}{3}x + 2</math>，得 <math>x = 3</math></p>	104 全國 聯招	單 選 6	A 0 1 0 7

1

小明口袋裡有 2 個白球，大華口袋裡有 3 個紅球，現在兩人自口袋裡隨機取一個球和對方交換，求交換三次後，小明口袋裡有 1 白球 1 紅球的機率為？

【解答】  $\frac{23}{36}$

【詳解】以 R 表示紅球，W 表示白球

換第一次的結果，小明必為 WR，大華必為 WRR。

換第二次，小明可能變成 WW、WR、RR。

若小明變為 WW，機率為  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 。(小明抽到 R 且大華抽到 W)

若小明變為 RR，機率為  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 。(小明抽到 W 且大華抽到 R)

若小明變為 WR，機率為  $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 。(用扣的)

第三回小明變成 WR。

若小明由 WR 變成 WR，機率為  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 。

若小明由 WW 變成 WR，機率為  $\frac{1}{6} \times 1$ 。(1 是小明抽到 W 且大華抽到 R)

若小明由 RR 變成 WR，機率為  $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$ 。(  $\frac{2}{3}$  是因小明抽到 R 且大華抽到 W)

所求  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{23}{36}$ 。

104  
全國  
聯招

單  
選  
7

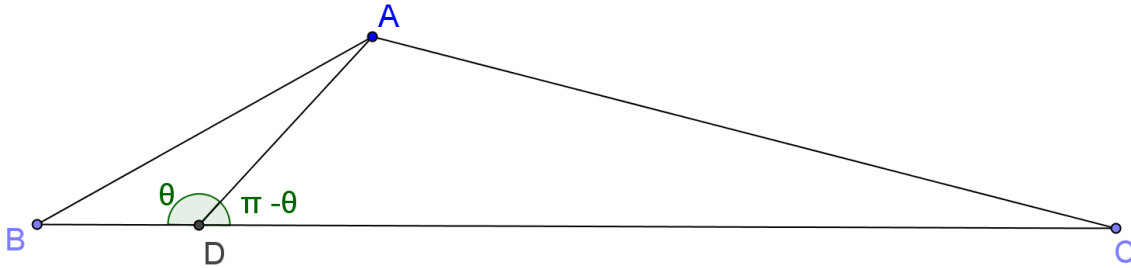
A  
0  
1  
0  
8

$\triangle ABC$  中， $D$  為  $\overline{BC}$  上一點，設  $R_1, R_2, R_3$  分別為  $\triangle ABD, \triangle ACD, \triangle ABC$  的外接圓半徑，若  $R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 3$ ，則  $\overline{AB} : \overline{AD} : \overline{AC} = ?$

(A) 1:2:3 (B) 3:1:2 (C) 2:3:6 (D) 3:2:6

【解答】(D) 3:2:6

【詳解】



令  $\angle ADB = \theta, \angle ADC = \pi - \theta$ ， $R_1 : R_2 : R_3 = t : 2t : 3t$ 。則由正弦定理可知

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = \frac{\overline{AD}}{\sin B} = 2t \dots (1), \quad \frac{\overline{AC}}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{AD}}{\sin C} = 2 \cdot 2t \dots (2), \quad \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2 \cdot 3t \dots (3)。$$

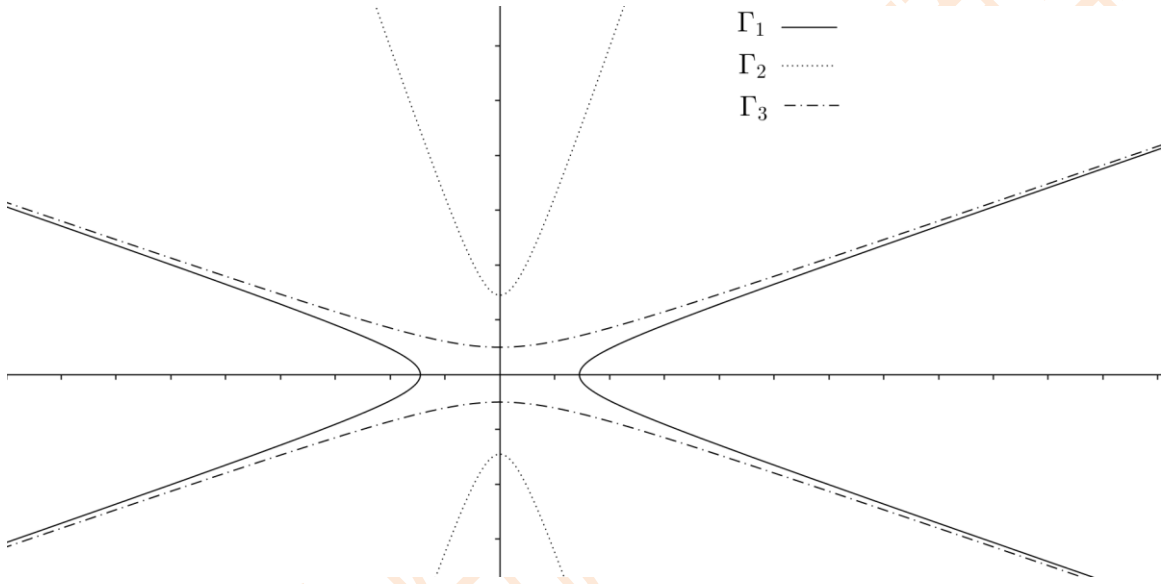
在第一、二式中，利用  $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$  可知  $\overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2$ ，代入第三式可知

$$\sin B = 2 \sin C，再代入第一三式可知  $\overline{AB} = 2t \sin \theta = 6t \sin C$ ， $\sin \theta = 3 \sin C$ 。$$

因此  $\sin B : \sin C : \sin \theta = 2 : 1 : 3$ ，可知  $\overline{AB} : \overline{AD} = \sin \theta : \sin B = 3 : 2$ 。

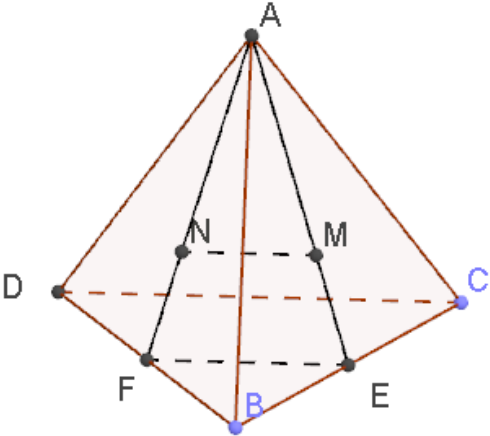
所求  $\overline{AB} : \overline{AD} : \overline{AC} = 3 : 2 : 6$

【速解】得到  $\overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2$  就能選答案了。

1	<p>下列有關 <math>\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math> , <math>\Gamma_2: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1</math> , <math>\Gamma_3: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1</math> 的敘述，哪些正確？</p> <p>(A) <math>\Gamma_1</math> 與 <math>\Gamma_2</math> 貫軸與共軛軸互換。            (B) <math>\Gamma_1</math> 與 <math>\Gamma_2</math> 圖形經過移動或轉動後能夠完全重合。            (C) <math>\Gamma_2</math> 與 <math>\Gamma_3</math> 有共同的焦點。            (D) <math>\Gamma_2</math> 與 <math>\Gamma_3</math> 有共同的漸進線</p> <p><b>【解答】BC</b></p> <p><b>【詳解】</b> (A)兩者貫軸長都是 <math>2a</math>，共軛軸長都是 <math>2b</math>            (B)轉動 <math>90^\circ</math> (C)焦點都是 <math>(0, \pm c)</math> (D)<math>\Gamma_1</math> 與 <math>\Gamma_3</math> 有共同的漸進線</p> 	104 全國 聯招	複選 9	A 0 1 1 0
1	<p>有一道光線由點 <math>A(1,1,1)</math> 射向平面 <math>E: x-2y+z=3</math>，經平面反射後，通過點 <math>B(5,3,2)</math>，若反射光所在的直線方程式為 <math>\begin{cases} \frac{x-3}{4} = \frac{y+a}{b} \\ z=c \end{cases}</math>，則下列哪些選項是正確的？</p> <p>(A) <math>a = \frac{5}{3}</math> (B) <math>b = 3</math> (C) <math>c = 2</math> (D) <math>a+b+c = 7</math></p> <p><b>【解答】CD</b></p> <p><b>【詳解】</b> 將 <math>A(1,1,1)</math> 對平面 <math>E: x-2y+z=3</math> 做對稱點，得 <math>A' = (2, -1, 2)</math>。            反射光所在的直線方程式即為 <math>\overline{A'B}</math>，可知方向向量為 <math>(3, 4, 0)</math>，代入可解得 <math>a = -\frac{1}{3}, b = \frac{16}{3}, c = 2</math>，<math>a+b+c = 7</math>。</p>	104 全國 聯招	複選 1 0	A 0 1 1 1

1	<p>將一年 16 班十位學生第一次期中考數學、物理的成績分別以 <math>X, Y</math> 表示，成績整理成下表：</p> <table border="1" data-bbox="97 277 943 427"> <thead> <tr> <th>學生</th> <th>甲</th> <th>乙</th> <th>丙</th> <th>丁</th> <th>戊</th> <th>己</th> <th>庚</th> <th>辛</th> <th>壬</th> <th>癸</th> <th>平均</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>數學(X)</td> <td>90</td> <td>80</td> <td>50</td> <td>65</td> <td>75</td> <td>50</td> <td>70</td> <td>80</td> <td>60</td> <td>90</td> <td>71</td> </tr> <tr> <td>物理(Y)</td> <td>80</td> <td>70</td> <td>50</td> <td>70</td> <td>65</td> <td>55</td> <td>60</td> <td>75</td> <td>65</td> <td>90</td> <td>68</td> </tr> </tbody> </table> <p>設數學成績的標準差為 <math>\sigma_x</math>，物理成績的標準差為 <math>\sigma_y</math>，<math>X, Y</math> 的相關係數為 <math>r</math>，物理對於數學的最佳直線為 <math>L</math>，則下列哪些選項是正確的？</p> <p>(A) 只將甲與乙的數學成績互換，則互換之後新的數學成績的標準差亦為 <math>\sigma_x</math></p> <p>(B) 只將甲與乙的數學成績互換，則互換之後新的數學與物理成績的相關係數亦為 <math>r</math>。</p> <p>(C) 將每位學生的數學與物理成績互換（即：甲數學變為 80，物理變為 90；乙數學變為 70，物理變為 80；...），則互換之後數學與物理的相關係數亦為 <math>r</math>。</p> <p>(D) 將每位學生的數學成績加 5 分，則加分後新的『物理對於數學的最佳直線斜率』與的斜率相等 <math>L</math>。</p> <p><b>【解答】</b> ACD</p> <p><b>【詳解】</b> (B) 相關係數的分母不變，但分子 <math>\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})</math> 有改變。</p>	學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸	平均	數學(X)	90	80	50	65	75	50	70	80	60	90	71	物理(Y)	80	70	50	70	65	55	60	75	65	90	68	104 全國 聯 招	複 選 1 1
學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸	平均																												
數學(X)	90	80	50	65	75	50	70	80	60	90	71																												
物理(Y)	80	70	50	70	65	55	60	75	65	90	68																												
1	<p>投擲一均勻的骰子 3 次，出現的點數依次為 <math>a, b, c</math>，則</p> <p>(A) <math>a &lt; b &lt; c</math> 的機率為 <math>\frac{5}{54}</math> (B) <math>a \leq b \leq c</math> 的機率為 <math>\frac{7}{27}</math> (C) <math>a + b + c = 11</math> 的機率為 <math>\frac{1}{8}</math> (D) <math>(a - b)(b - c) = 0</math> 的機率為 <math>\frac{11}{36}</math></p> <p><b>【解答】</b> ABCD</p> <p><b>【詳解】</b> (A) <math>\frac{C_3^6}{6^3} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}</math> (B) <math>\frac{H_3^6}{6^3} = \frac{C_3^8}{6^3} = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}</math> (C) 方法數有 <math>(1, 4, 6), (1, 5, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4)</math>，機率为 <math>\frac{6+3+6+6+3+3}{216} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}</math></p> <p>(D) 機率为 <math>P(a = b \cup b = c) = P(a = b) + P(b = c) - P(a = b = c) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{6}{216} = \frac{11}{36}</math></p>	104 全國 聯 招	複 選 1 2																																				

1	<p>設 <math>a \in \mathbb{R}</math>，若 <math>a + \log_2 3</math>，<math>a + \log_4 3</math>，<math>a + \log_8 3</math> 是等比數列，求此等比數列的公比為？</p> <p><b>【解答】</b> <math>\frac{1}{3}</math></p> <p><b>【詳解】</b> 令 <math>\log_2 3 = t</math>，則 <math>a + t, a + \frac{t}{2}, a + \frac{t}{3}</math> 為等比數列。</p> <p>解 <math>(a + \frac{t}{2})^2 = (a + t)(a + \frac{t}{3})</math>，得 <math>\frac{1}{3}t(\frac{1}{4}t + a) = 0</math>，<math>a = -\frac{1}{4}t</math></p> <p>所以原等比數列可化為 <math>\frac{3}{4}t, \frac{1}{4}t, \frac{1}{12}t</math>，因此公比為 <math>\frac{1}{3}</math>。</p>	104 全國 聯招	填充 1	A 0 1 1 4
1	<p>求 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2} = ?</math></p> <p><b>【解答】</b> <math>\frac{\pi}{4}</math></p> <p><b>【詳解】</b> <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - (\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx</math></p> <p>為單位圓在第一象限中的面積 <math>\frac{\pi}{4}</math>。</p>	104 全國 聯招	填充 2	A 0 1 1 5
1	<p>小花閒來無事，畫出一個 <math>29 \times 17</math> 之棋盤。且從第一列開始，從左而右依次填入 1, 2, 3, ……………, 29；第二列填入 30, 31, 32, ……………, 58；依此類推將 493 個數字依次填入之後，小花又改為從第一行開始由上而下依次填入 1, 2, 3, ………, 17；第二行填入 18, 19, 20, ……………, 38；依此類推將 493 個數填完。則在這兩次填入數字的過程中，位置沒有改變的數字之總和為？</p> <p><b>【解答】</b> 1235</p> <p><b>【詳解】</b> 按照第一種方式來排，在第 a 列第 b 行的數，其值為 <math>29 \times (a - 1) + b</math></p> <p>按照第二種方式來排第 a 列第 b 行的數，其值為 <math>17 \times (b - 1) + a</math>。</p> <p>位置沒有改變代表兩種算法相同，解 <math>29 \times (a - 1) + b = 17 \times (b - 1) + a</math>，可得 <math>7a - 4b = 3</math></p> <p>在 <math>a = 1, 2, \dots, 17</math>，<math>b = 1, 2, \dots, 29</math> 中找尋符合 <math>7a - 4b = 3</math> 的解，有</p> <p><math>(a, b) = (1, 1), (5, 8), (9, 15), (13, 22), (17, 29) = (4k + 1, 7k + 1), k = 0, 1, 2, 3, 4</math>。</p> <p>所代表的數字和為 <math>\sum_{a,b} 29 \times (a - 1) + b = \sum_{k=0}^4 29 \times (4k) + (7k + 1) = \sum_{k=0}^4 123k + 1 = 1235</math>。</p>	104 全國 聯招	填充 3	A 0 1 1 6

1	<p>正四面體 <math>ABCD</math> 中，<math>\triangle ABC</math> 與 <math>\triangle ACD</math> 的重心分別為 <math>M</math> 與 <math>N</math>，已知 <math>\overline{MN} = 2</math>，四面體 <math>ABCD</math> 的內切球體積為？</p> <p><b>【解答】</b> <math>\sqrt{6}\pi</math></p> <p><b>【詳解】</b>  做 <math>BC</math> 中點 <math>E</math>，以及 <math>BD</math> 中點 <math>F</math>，則</p> <p><math>M</math>、<math>N</math> 分別落在 <math>\overline{AE}</math>、<math>\overline{AF}</math> 上，且 <math>\triangle AMN \sim \triangle AEF</math>，邊長比為 <math>2:3</math>，所以 <math>\overline{MN} = \frac{1}{3}a = 2</math>，可知正四面體邊長為 <math>6</math>。</p> <p>正四面體內切球半徑為 <math>\frac{\sqrt{6}}{12}a = \frac{\sqrt{6}}{2}</math>，體積為 <math>\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi</math>。</p>	104 全國 聯招	填充 4	A 0 1 1 7
1	<p><math>O</math> 為坐標平面的原點，若 <math>\overline{OP} = (3\cos\alpha + \sin\beta, 2\cos\alpha + 4\sin\beta)</math>，<math>\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}</math>，<math>0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}</math>，則所有 <math>P</math> 點所形成的面積為？</p> <p><b>【解答】</b> <math>\frac{15}{2}</math></p> <p><b>【詳解】</b> <math>\overline{OP} = \cos\alpha \times (3, 2) + \sin\beta \times (1, 4)</math>，其中 <math>0 \leq \cos\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}</math>，<math>0 \leq \sin\beta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}</math>。</p> <p>因向量 <math>(3, 2)</math> 與向量 <math>(1, 4)</math> 所形成的平行四邊形面積為 <math>\begin{vmatrix} 3 &amp; 2 \\ 1 &amp; 4 \end{vmatrix} = 10</math>，所以 <math>P</math> 點所形成的面積為 <math>\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = \frac{15}{2}</math>。</p>	104 全國 聯招	填充 5	A 0 1 1 8

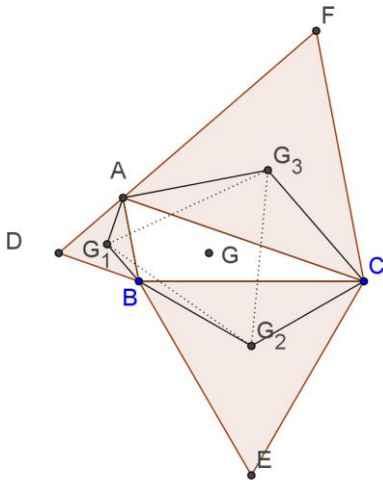


1	<p>有一遊戲規則為：袋中有 1 號、2 號、3 號...9 號球各一個，由袋中任抽兩球。若兩球的號碼，在下方的看板上，為同行且相鄰或同列且相鄰，則可以得到格子內金額的獎金；否則沒有獎金，例如：抽到 1 號、6 號則可得到 <math>1+6=7</math> 元，投到 1 號、9 號就得到 0 元，則玩此遊戲乙次所得獎金的期望值為？</p> <table border="1" data-bbox="98 405 236 656"> <tr><td>1</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>3</td></tr> </table> <p><b>【解答】</b> <math>\frac{67}{18}</math></p> <p><b>【詳解】</b> <math>\frac{(45+6+9+8)+(45+5+9+7)}{C_2^9} = \frac{134}{36} = \frac{67}{18}</math></p> <p><b>【備註】</b> 橫列中有 6 種狀況是有獎金的，分別是 <math>(1,6), (5,9), (4,8), (6,2), (9,7), (8,3)</math> 計算期望值把這些數字加起來就是分子，1~9 都出現至少一次，6、9、8 出現兩次，所以計算為 <math>(45+6+9+8)</math>；同理直行 6 種情況和為 <math>(45+5+9+7)</math></p>	1	6	2	5	9	7	4	8	3	104 全國 聯招		填充 6  A 0 1 1 9
1	6	2											
5	9	7											
4	8	3											
1	<p>由 1、2、3、...、20 挑出 <math>x_1, x_2, x_3</math> 三個數，且 <math>x_1 &lt; x_2 &lt; x_3</math>；求 <math>x_1</math> 與 <math>x_2</math> 至少差 4，<math>x_2</math> 與 <math>x_3</math> 至少差 5 的機率為？</p> <p><b>【解答】</b> <math>\frac{143}{570}</math></p> <p><b>【詳解】</b> 令 <math>x_1 - 1 = a</math>，<math>x_2 - x_1 = b</math>，<math>x_3 - x_2 = c</math>，<math>20 - x_3 = d</math>，則 <math>a + b + c + d = 19</math>。依題目要求，計算 <math>a + b + c + d = 19</math>，且 <math>b \geq 4</math>，<math>c \geq 5</math> 的非負整數解，為</p> <p><math>H_{19-4-5}^4 = H_{10}^4 = C_3^{13}</math>，機率为 <math>\frac{C_3^{13}}{C_3^{20}} = \frac{13 \times 12 \times 11}{20 \times 19 \times 18} = \frac{143}{570}</math>。</p>	104 全國 聯招		填充 7  A 0 1 2 0									

1  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ， $\overline{AC} = 3\sqrt{3}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{21}$ ，由各邊分別向外作正三角形。已知此三個向外所作正三角形的重心會形成一個新的正三角形，求此新正三角形的面積為？

【解答】  $\frac{13\sqrt{3}}{4}$

【詳解】



利用  $\angle G_1AG_3 = \angle A + 60^\circ$ ，可知

$$\begin{aligned}\overline{G_1G_3}^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}b\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}c\right)^2 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}b \times \frac{1}{\sqrt{3}}c \times \cos(60^\circ + A) = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}bc \sin A \\ &= \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\triangle ABC = \frac{1}{6}(3 + 27 + 21) + \frac{9}{2} = 13 \quad , \text{所求為 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times 13 = \frac{13\sqrt{3}}{4} .\end{aligned}$$

【備註】證明為三重心連成一正三角形。

如圖，連接  $\overline{AG_1}, \overline{G_1B}, \overline{BG_2}, \overline{G_2C}, \overline{CG_3}, \overline{G_3A}$ ，可知

$$\overline{AG_1} = \overline{G_1B} = \frac{1}{\sqrt{3}}a, \overline{BG_2} = \overline{G_2C} = \frac{1}{\sqrt{3}}b, \overline{CG_3} = \overline{G_3A} = \frac{1}{\sqrt{3}}c \quad , \text{且 } \angle G_1AG_3 = \angle A + 60^\circ ,$$

$\angle G_1BG_2 = \angle B + 60^\circ$ ， $\angle G_2CG_3 = \angle C + 60^\circ$ ，利用餘弦定理可知

$$\begin{aligned}\overline{G_1G_3}^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}b\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}c\right)^2 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}b \times \frac{1}{\sqrt{3}}c \cos(60^\circ + A) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}b\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}c\right)^2 - \frac{2}{3}bc \left[ \frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}b\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}c\right)^2 - \frac{1}{3}bc \left[ \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] + \frac{\sqrt{3}}{3}bc \sin A \\ &= \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}bc \sin A\end{aligned}$$

，同理可得  $\overline{G_1G_2}^2, \overline{G_2G_3}^2$

$$\overline{G_1G_2}^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}ac \sin B \quad , \quad \overline{G_2G_3}^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}ab \sin C \quad , \text{因 } \triangle ABC$$

面積  $= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ ，所以  $\overline{G_1G_3}^2 = \overline{G_1G_2}^2 = \overline{G_2G_3}^2$ 。

1

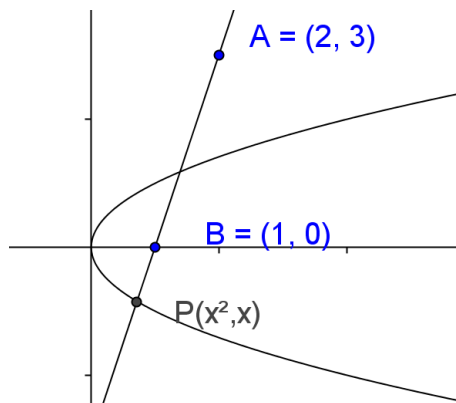
設  $x \in \mathbb{R}$ ，求  $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$  的最大值為？

【解答】  $\sqrt{10}$

【詳解】  $f(x) = \sqrt{(x^2 - 2)^2 + (x - 3)^2} - \sqrt{(x^2 - 1)^2 + x^2}$ ，可視為三點

$P(x^2, x)$ ,  $A(2, 3)$ ,  $B(1, 0)$  中， $\overline{PA} - \overline{PB}$  的最大值，因三角形第三邊大於兩邊之差，所以

$P$ 、 $A$ 、 $B$  不為三角形時， $\overline{PA} - \overline{PB}$  有最大值，此最大值為  $\overline{AB} = \sqrt{10}$ 。



104  
全國  
聯招

填  
充  
9

A  
0  
1  
2  
2