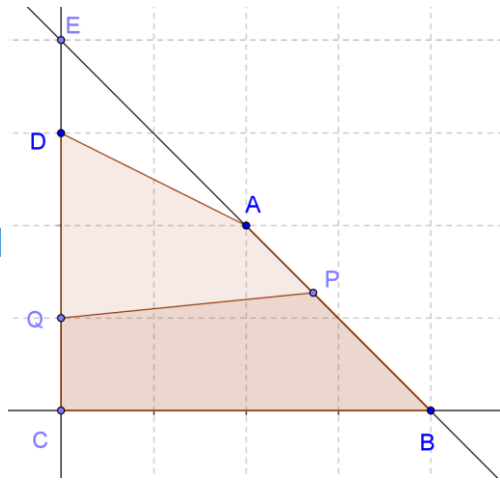


1	<p>已知數列 $\langle a_n \rangle$ 對於任意正整數 p, q，恆有 $a_p + a_q = a_{p+q}$，若 $a_1 = 13$，求 a_{2015}？</p> <p>【解答】 26195</p> <p>【詳解】 $a_{2015} = a_{1+1+\dots+1} = a_1 + a_1 + \dots + a_1 = 2015 \times 13 = 26195$</p>	104 台 中 女 中		A 0 0 1 6
1	<p>在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB} = \overline{AC}$，D 為 \overline{AC} 的中點，且 $\overline{BD} = \sqrt{3}$，若 $\overline{AB} = k$ 時，$\triangle ABC$ 的面積有最大值 M，則數對 $(k, M) = ?$</p> <p>【解答】 $(\frac{2\sqrt{15}}{3}, 2)$</p> <p>【詳解】 設 $\overline{AB} = k = 2a$，則 $\triangle ABD$ 邊長為 $2a, a, \sqrt{3}$，且 $\triangle ABD$ 面積為 $\triangle ABC$ 面積的一半，因此可改求 $\triangle ABD$ 面積的最大值 $\frac{M}{2}$，利用海龍公式可知 $s = \frac{3a + \sqrt{3}}{2}$，所以</p> $\frac{M}{2} = \sqrt{\left(\frac{3a + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{a + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-a + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3a - \sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{(3 - a^2)(3a^2 - 1)}$ <p>，令 $a^2 = t > 0$，可知</p> $\frac{M}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{(3 - t)(3t - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{-3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}}$ <p>，因此 M 的最大值為</p> $2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{\frac{16}{3}} = 2$ <p>，此時 $t = a^2 = \frac{5}{3}$，$k = 2a = 2 \times \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$</p>	104 台 中 女 中		A 0 0 1 7

四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CD} = 3$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，點 P 在 \overline{AB} 上，點 Q 在 \overline{CD} 上，若 \overline{PQ} 平分四邊形 $ABCD$ 的面積，則 \overline{PQ} 的最小值為？

【解答】 $3\sqrt{2\sqrt{2}-2}$



【詳解】

如圖，由題目條件可算出四邊形 $ABCD$

的面積為 7，所以 $PQCB$ 面積為 $\frac{7}{2}$ ，延長 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 交於 E 點，可知 $\angle PEQ = 45^\circ$ ，且

$\triangle PEQ$ 面積為 $8 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$ 。

利用 $\overline{PQ}^2 = |\overline{PQ}|^2 = |\overline{PE} + \overline{EQ}|^2 = |\overline{PE}|^2 + |\overline{EQ}|^2 - 2|\overline{PE}| \cdot |\overline{EQ}| \cdot \cos 45^\circ$ ，

又 $\triangle PEQ$ 面積可寫為 $\frac{1}{2} \overline{PE} \cdot \overline{EQ} \cdot \sin 45^\circ$ ，所以可知 $\frac{1}{2} \overline{PE} \cdot \overline{EQ} \cdot \sin 45^\circ = \frac{9}{2}$ ，代入前式

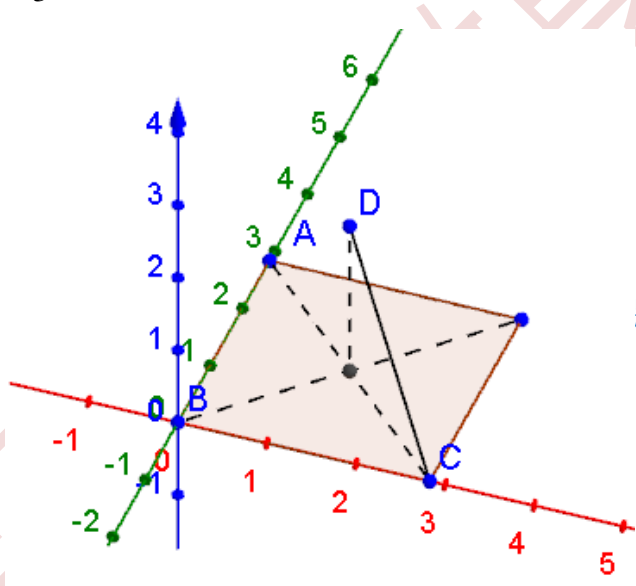
可得 $|\overline{PE}| \cdot |\overline{EQ}| = 9\sqrt{2}$ ， $\overline{PQ}^2 = |\overline{PE}|^2 + |\overline{EQ}|^2 - 18$ 。

由算幾不等式可知 $\frac{|\overline{PE}|^2 + |\overline{EQ}|^2}{2} \geq \sqrt{|\overline{PE}|^2 |\overline{EQ}|^2} = |\overline{PE}| \cdot |\overline{EQ}|$ ，等號成立時

$|\overline{PE}|^2 = |\overline{EQ}|^2$ ，設 $|\overline{PE}|^2 = |\overline{EQ}|^2 = x^2$ ，代入 $\triangle PEQ$ 面積可求得 $x^2 = 9\sqrt{2}$ 。

所求 $\overline{PQ}^2 = 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 18$ ， $\overline{PQ} = 3\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ 。

1	<p>骰子樂的遊戲規則如下：總共有三關，每關投擲兩顆公正的骰子，若點數和是 3 的倍數，則籌碼變成現有的 $\frac{5}{4}$ 倍，並可繼續投擲；若點數和是 7，則籌碼變成現有的 $\frac{1}{2}$ 倍，並可繼續投擲；若點數和不是 3 的倍數且點數和不是 7，則獎金歸零並停止投擲。已知參賽者一開始有 100 萬的籌碼，若順利經過三關後，則可依上述的遊戲規則獲得等值的獎金。請問第三關結束後，獲得獎金之期望值為多少元？</p> <p>【解答】 125000</p> <p>【詳解】 易知點數和是 3 的倍數機率為 $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$，點數和是 7 機率為 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$。</p> <p>所求期望值 = $1000000 \times (\frac{1}{3} \times \frac{5}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0)^3 = 1000000 \times (\frac{1}{2})^3 = 125000$</p>	104 台 中 女 中		A 0 0 1 9
---	--	-------------------------	--	-----------------------

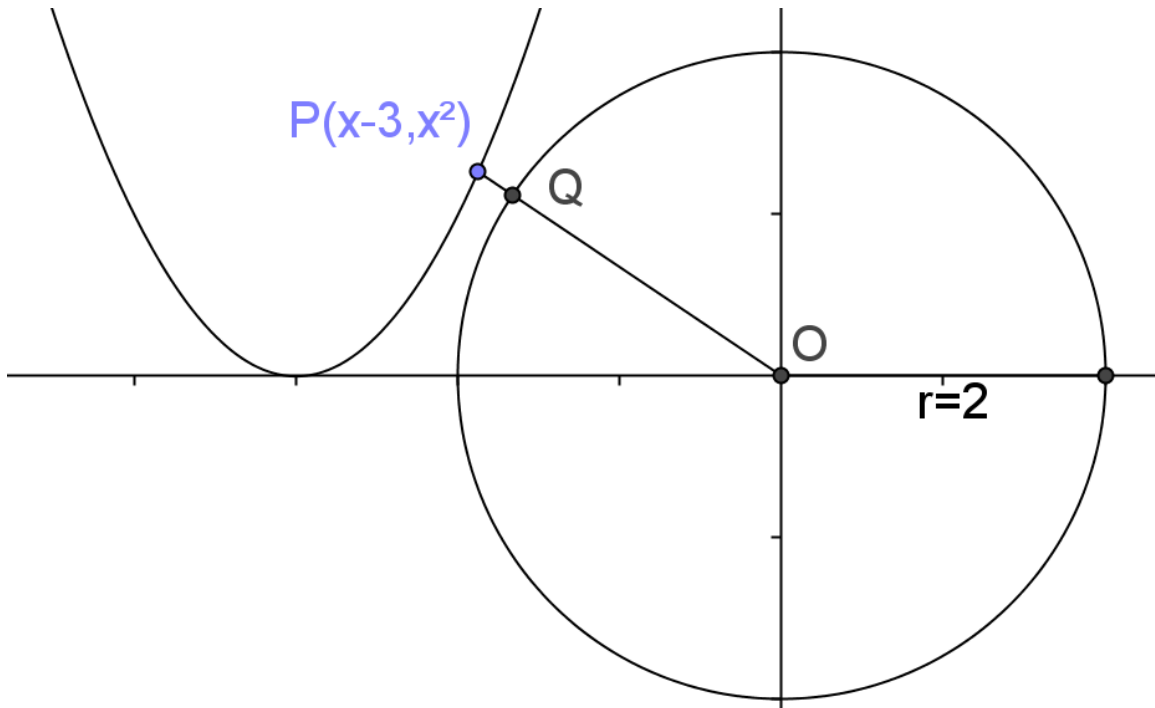
1	<p>有一邊長為 $2\sqrt{2}$ 的正方形 ABCD。今沿著它的對角線 \overline{AC} 摺起，使得平面 ABC 與平面 ACD 互相垂直，則直線 AB 與直線 CD 間的公垂線段長(亦即此兩直線間的距離)為？</p> <p>【解答】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$</p> <p>【詳解】  將各點坐標化，令</p> <p>$A(0, 2\sqrt{2}, 0), B(0, 0, 0), C(2\sqrt{2}, 0, 0)$，可求出 $D(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$。計算兩直線 AB, CD 公垂線段長，$\overline{V_{AB}} = (0, 1, 0), \overline{V_{CD}} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$，可得 $\overline{V_{AB}} \times \overline{V_{CD}} = (2, 0, \sqrt{2})$，設 AB 所在的平面為 $2x + \sqrt{2}z = 0$，將 $C(2\sqrt{2}, 0, 0)$ 代距離公式 $d(E_{AB}, C) = \frac{ 2 \cdot 2\sqrt{2} + 0 }{\sqrt{2^2 + \sqrt{2}^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$</p>	104 台 中 女 中		A 0 0 2 0
---	--	-------------------------	--	-----------------------

1	<p>已知 $f(x)$ 為多項式函數，$f(0)=1$，若 $g(x)=x^{2015}+2015x$，且對實數 x, y 恆有 $f(x+y)=f(x)+g(y)$，則 $\int_{-1}^1 f(x)dx = ?$</p> <p>【解答】 2</p> <p>【詳解】 由 $f(x+y)=f(x)+g(y)$ 可知 $f(y)=f(0+y)=f(0)+g(y)$，所以</p> $f(x)=f(0)+g(x)=x^{2015}+2015x+1, \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{2016}x^{2016} + \frac{2015}{2}x^2 + x \Big _{-1}^1 = 2。$	104 台 中 女 中		A 0 0 2 1
1	<p>已知 c 為一實數，使方程式 $4x^3 - 24x^2 + (47+c)x - (33+3c) = 0$ 恰好有一實根，求 c 值的範圍為？</p> <p>【解答】 $c > -2$</p> <p>【詳解】 原式 $x^3 - 6x^2 + \frac{(47+c)}{4}x - \frac{(33+3c)}{4} = 0$，平移 $x' = x + 2$，可化為</p> $x^3 + \left(\frac{c-1}{4}\right)x + \left(\frac{-3-c}{4}\right) = 0, \text{代三次方程式判別式 } \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, \text{可得}$ $\left(\frac{-3-c}{4}\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\frac{c-1}{4}\right)^3 > 0 \Rightarrow c^3 + 24c^2 + 165c + 242 > 0, \text{因式分解為}$ $(c+2)(c+11)^2 > 0, \text{所以可得 } c \text{ 值的範圍為 } c > -2。$	104 台 中 女 中		A 0 0 2 2

1 試求 $(x-3-2\sin y)^2 + (x^2 - 2\cos y)^2$ 的最小值？

【解答】 $9-4\sqrt{5}$

【詳解】



所求可視為 $(x-3, x^2), (2\sin y, 2\cos y)$ 兩點的距離平方最小值，也就是拋物線 $y = (x+3)^2$ 與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 兩點距離最小值平方 \overline{PQ}^2 ，可先算拋物線上一點到圓心 $(0, 0)$ 的距離再扣掉半徑。

$\overline{PO}^2 = (x-3)^2 + (x^2)^2$ ，對 x 微分可得 $\frac{d\overline{PO}^2}{dx} = 4x^3 + 2x - 6$ ，易知一階導數為 0 時，

$x=1$ 。將 $x=1$ 代入可知 $P(-2, 1)$ ，所以 $\overline{PQ} = \sqrt{5} - 2, \overline{PQ}^2 = 9 - 4\sqrt{5}$

1	<p>設 $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{9}{2}$，$f(x) = \sqrt{3x-7} + 2\sqrt{9-2x}$，則 $f(x)$ 最大值為？</p> <p>【解答】 $\sqrt{\frac{143}{6}}$</p> <p>【詳解】 利用柯西不等式</p> $\left[\left(\sqrt{\frac{3x-7}{3}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9-2x}{2}} \right)^2 \right] \times [(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2] \geq (\sqrt{3x-7} + 2\sqrt{9-2x})^2$ ，可知 $\left[\frac{3x-7}{3} + \frac{9-2x}{2} \right] \times [(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2] \geq (\sqrt{3x-7} + 2\sqrt{9-2x})^2$ ，所以 $\frac{13}{6} \times 11 \geq (\sqrt{3x-7} + 2\sqrt{9-2x})^2 \Rightarrow \sqrt{3x-7} + 2\sqrt{9-2x} \leq \sqrt{\frac{143}{6}}$ 。	104 台 中 女 中			A 0 0 2 4
1	<p>今有 20 枝相同的筆要全部分給 A、B、C、D 四人，每人至少分得一枝，若僅考慮四人所獲得筆的數量，則 A 獲得的數量大於 B 獲得的數量之分法有幾種？</p> <p>【解答】 444</p> <p>【詳解】 先每人各分一枝，剩餘 16 支給 4 人分。</p> <p>(1) 考慮 $A+B=16, C+D=0$，此時有 8×1 種。</p> <p>(2) 考慮 $A+B=15, C+D=1$，此時有 8×2 種。</p> <p>(3) 考慮 $A+B=14, C+D=2$，此時有 7×3 種。</p> <p>(4) 考慮 $A+B=13, C+D=3$，此時有 7×4 種。</p> <p>以此類推，可知所求為 $8 \times (1+2) + 7 \times (3+4) + 6 \times (5+6) + \dots + 1 \times (15+16)$，直接計算即可得 444。</p>	104 台 中 女 中			A 0 0 2 5

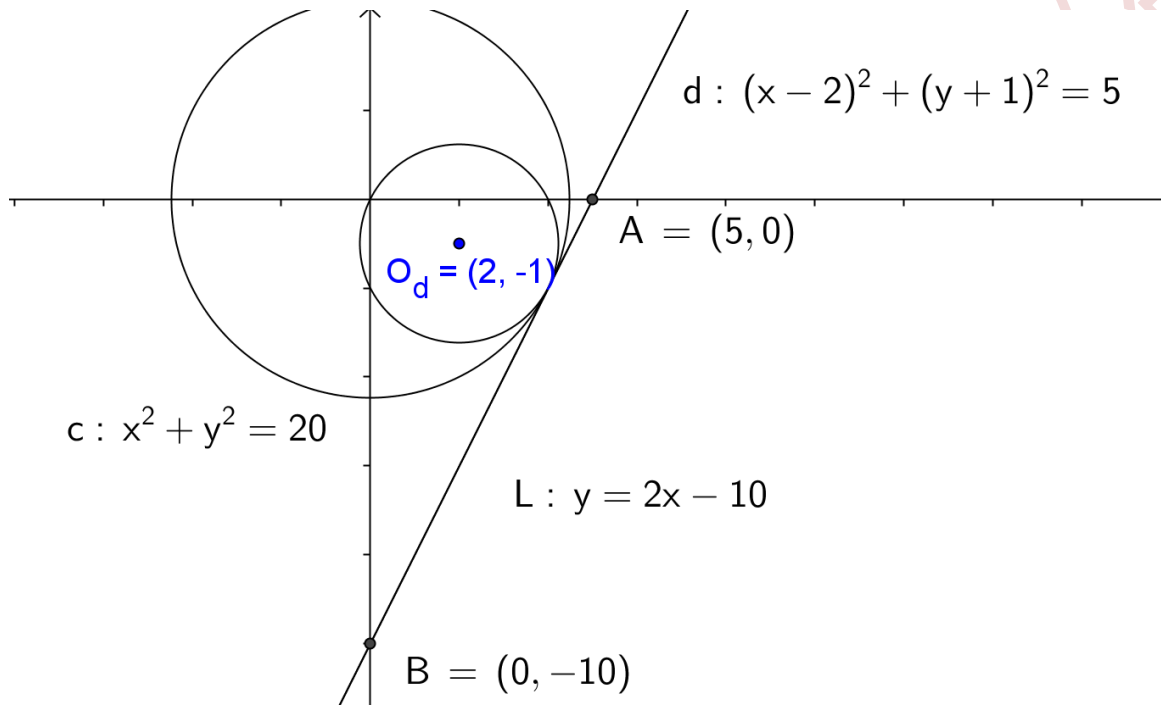
1

設 (x, y) 為圓 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 上一動點，且 (x, y) 非原點，則所有複數點 $z = \frac{20}{x+yi}$ 的軌跡方程式為？

【解答】 $2x - y - 10 = 0$

【詳解】同取絕對值 $|z| = \frac{20}{|x+yi|}$ ，可知 $|z||x+yi| = 20 \Rightarrow |z(x-yi)| = 20$ ，可視為

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ 對 $x^2 + y^2 = 20$ 作反演，結果為一直線。



104
台
中
女
中

A
0
0
2
6

設數列 $a_n = \sqrt[3]{n^2 + 2n + 1} + \sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^2 - 2n + 1}$ ， $S_{n+1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2n+1}}$ ，求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \left(\frac{1}{S_{n+1}} + \frac{1}{S_{n+2}} + \frac{1}{S_{n+3}} + \dots + \frac{1}{S_{2n}} \right) = ?$$

【解答】 $\frac{3}{2}(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$

【詳解】 $a_n = \sqrt[3]{n^2 + 2n + 1} + \sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^2 - 2n + 1} = \sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}$

令 $\sqrt[3]{n+1} = a, \sqrt[3]{n-1} = b$ ，則 $a_n = a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{2}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}$ ，

因此 $\frac{1}{a_n} = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{2}$ ，

所以 $S_{n+1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2n+1}}$

$$= \frac{1}{2} \left[(\sqrt[3]{1+1} - \sqrt[3]{1-1}) + (\sqrt[3]{3+1} - \sqrt[3]{3-1}) + \dots + (\sqrt[3]{2n+1+1} - \sqrt[3]{2n+1-1}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt[3]{2n+2}$$

所求 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2n+2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2n+4}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2n+6}} + \dots + \frac{2}{\sqrt[3]{2n+2n}} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt[3]{n}}{n} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2n+4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2n+6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n+2n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt[3]{n}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2(1+i)}}$$

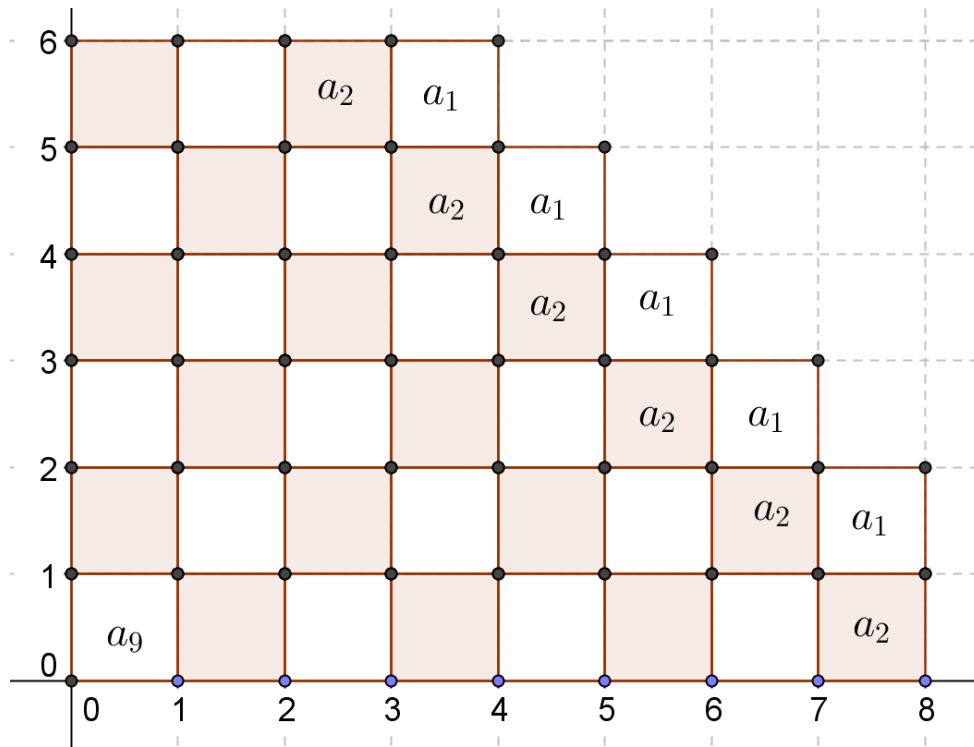
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{1+i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{4} \cdot \int_0^1 (1+x)^{-\frac{1}{3}} dx = \sqrt[3]{4} \times \left[\frac{3}{2} (1+x)^{\frac{2}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{2} (2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$$

1

若 $0 \leq x < 8$ ， $0 \leq y < 6$ ，則在空間中 $[x] + [y] + [2z] = 8$ 的圖形體積為？([] 為高斯符號)

【解答】 19

【詳解】



當 $0 \leq z < \frac{1}{2}$ 時， $[x] + [y] = 8$ 的圖形為標有 a_1 的 5 個正方形，同理， $\frac{1}{2} \leq z < 1$ 時，

$[x] + [y] = 7$ 的圖形為標有 a_2 的 6 個正方形，所以可將此圖形體積拆成許多高為 $\frac{1}{2}$ ，

底面為邊長為 1 的正方體，由上圖可知總個數為 38 個。所求 $= \frac{1}{2} \times 38 = 19$ 。

104
台
中
女
中

A
0
0
2
8

1

設 $O(0,0)$ ， $L: x-3=0$ ，已知 Γ 上動點 P 滿足 $\overline{OP} = 2d(P;L)$ ，若平面上一點 $A(-4,2)$ ，則 $2\overline{PA} + \overline{PO}$ 的最小值為？

【解答】 14

【詳解】 $2\overline{PA} + \overline{PO} = 2\overline{PA} + 2d(P;L) \leq 2d(A;L) = 2 \times 7$ ，故所求為 14。

104
台
中
女
中

A
0
0
2
9

1	<p>設多項式 $f(x) = x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$，其中 $a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ 是集合 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 中的七個相異元素，若 $x^3 + x^2 + x + 1$ 是多項式 $f(x)$ 的因式，試問有幾個滿足條件的多項式 $f(x)$ ？</p> <p>【解答】 288</p> <p>【詳解】 $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1)$，所以</p> $f(-1) = -1 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_6 + a_4 + a_2 + a_0 = a_5 + a_3 + a_1 + 1,$ $f(i) = (-a_6 + a_4 - a_2 + a_0) + i(-1 + a_5 - a_3 + a_1) = 0 \Rightarrow a_4 + a_0 = a_6 + a_2, a_5 + a_1 = a_3 + 1$ <p>將 $f(i)$ 的條件代入 $f(-1)$ 的條件，可得 $2(a_4 + a_0) = 2(a_3 + 1)$，因此有</p> $1 + a_3 = a_4 + a_0 = a_6 + a_2 = a_5 + a_1.$ <p>考慮 a_3 可能的數，若 $a_3 = 10$，則 (a_4, a_0)、(a_6, a_2)、(a_5, a_1) 可能的組合為 $(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)$，有 $(4 \times 3 \times 2) \times 2^3 = 196$ 種。</p> <p>若 $a_3 = 9$，則可能的組合為 $(2, 8), (3, 7), (4, 6)$，有 $(3 \times 2 \times 1) \times 2^3 = 48$ 種。</p> <p>若 $a_3 = 8$，則可能的組合為 $(2, 7), (3, 6), (4, 5)$，有 $(3 \times 2 \times 1) \times 2^3 = 48$ 種。</p> <p>若 $a_3 = 7$，則可能的組合為 $(2, 6), (3, 5)$，不滿足相異的條件，因此 $a_3 \leq 7$ 皆不合。</p> <p>所以共有 $196 + 48 + 48 = 288$ 種。</p>	104 台 中 女 中		A 0 0 3 0
1	<p>試求 $\sin^2(2015) + \sin^2(2015 + \frac{\pi}{2014}) + \sin^2(2015 + \frac{2\pi}{2014}) + \dots + \sin^2(2015 + \frac{2013\pi}{2014})$ 之值為？</p> <p>【解答】 1007</p> $\sin^2(2015 + \frac{k\pi}{2014}) = \cos^2(\pi - 2015 - \frac{k\pi}{2014}) = \cos^2(\frac{(2014 - k)\pi}{2014} - 2015)$ <p>【詳解】</p> $= \cos^2(2015 - \frac{(2014 - k)\pi}{2014})$ <p>兩兩配對之後加總為 1，所以共有 $\frac{2014}{2} = 1007$。</p>	104 台 中 女 中		A 0 0 3 1