教育部受託辦理 104 學年度公立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題 20 題及綜合題 2 大題，共計 100 分；**選擇題請用 2B 軟心鉛筆在<u>答案卡</u>劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在<u>答案本</u>上作答**。<u>本科不可以使用電子</u>計算器

第一部分：選擇題（共 40 分）

一、單選題（每題 3 分，共 24 分）

(B) 1.設 $a_n=\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$ 之值為　(A)0　(B)$\dfrac{1}{2}$　(C)1　(D)$\dfrac{3}{2}$

(B) 2.試問 $\underbrace{888\cdots 88}_{\text{共有2015個8}}$ 被 13 除的餘數為　(A)4　(B)7　(C)8　(D)9

(A) 3.設△ABC 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=2\sqrt{7}$，$\angle A$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，$\overline{AB}$ 邊上的高為 $\overline{CH}$，且 $\overline{AD}$ 交 $\overline{CH}$ 於P，若 $\overrightarrow{BP}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}$，則數對 $\alpha+\beta=$？
(A)$\dfrac{7}{9}$　(B)$\dfrac{5}{9}$　(C)$\dfrac{2}{3}$　(D)$\dfrac{4}{9}$

(B) 4.已知 $f(x)=x^3-3x^2+bx+c$，若 $f(x)=0$ 的三根為 α，β，γ 且 $f(-1)=1$，則

$$\begin{vmatrix}1+\alpha & 1 & 1\\ 1 & 1+\beta & 1\\ 1 & 1 & 1+\gamma\end{vmatrix}=?$$　(A)-3　(B)-5　(C)2　(D)5

(C) 5.甲、乙、丙三人共同租一間房間，週一至週六每天抽籤決定一個人打掃，若規定同一個人不可以連著兩天打掃，則每一個人至少排到一天之機率最接近以下何者
(A)0.9　(B)0.92　(C)0.94　(D)0.96

(D) 6.一數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_1=1$ 且 $\forall n\in N$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的值為　(A)-3　(B)$-\dfrac{1}{3}$　(C)$\dfrac{1}{3}$
(D)3

(C) 7.<u>小明</u>口袋裡有 2 個白球，<u>大華</u>口袋裡有 3 個紅球，現在兩人自口袋裡隨機取一個球和對方交換，求交換三次後，<u>小明</u>口袋裡有 1 白球 1 紅球的機率為　(A)$\dfrac{17}{36}$　(B)$\dfrac{19}{36}$　(C)$\dfrac{23}{36}$
(D)$\dfrac{25}{36}$

(D) 8.△ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 上一點，設 R_1、R_2、R_3 分別為△ABD、△ACD、△ABC 的外接圓半徑，若 $R_1:R_2:R_3=1:2:3$，則 $\overline{AB}:\overline{AD}:\overline{AC}=$？　(A)$1:2:3$　(B)$3:1:2$　(C)$2:3:6$
(D)$3:2:6$

二、複選題（每題 4 分，共 16 分）

(BC) 9.下列有關Γ_1：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\Gamma_2$：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，$\Gamma_3$：$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$的敘述，哪些正確？

(A)Γ_1與Γ_2貫軸與共軛軸互換。

(B)Γ_1與Γ_2圖形經過移動或轉動後能夠完全重合。

(C)Γ_2與Γ_3有共同的焦點。

(D)Γ_2與Γ_3有共同的漸近線。

(CD)10.有一道光線由點$A(1,1,1)$射向平面$E: x-2y+z=3$，經平面反射後，通過點$B(5,3,2)$，

若反射光所在的直線方程式為$\begin{cases}\frac{x-3}{4}=\frac{y+a}{b}\\ z=c\end{cases}$，則下列哪些選項是正確的？

(A)$a=\frac{5}{3}$　(B)$b=3$　(C)$c=2$　(D)$a+b+c=7$

(ACD)11.將一年 16 班十位學生第一次期中考數學、物理的成績分別以X，Y表示，成績整理成下表：

學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸	平均
數學(X)	90	80	50	65	75	50	70	80	60	90	71
物理(Y)	80	70	50	70	65	55	60	75	65	90	68

設數學成績的標準差為σ_X，物理成績的標準差為σ_Y，X，Y的相關係數為r，物理對於數學的最佳直線為L，則下列哪些選項是正確的？

(A)只將甲與乙的數學成績互換，則互換之後新的數學成績的標準差亦為σ_X

(B)只將甲與乙的數學成績互換，則互換之後新的數學與物理成績的相關係數亦為r

(C)將每位學生的數學與物理成績互換（即：甲數學變為 80，物理變為 90；乙數學變為 70，物理變為 80；...），則互換之後數學與物理的相關係數亦為r

(D)將每位學生的數學成績加 5 分，則加分後新的『物理對於數學的最佳直線斜率』與L的斜率相等

(ABCD)12.投擲一均勻的骰子 3 次，出現的點數依次為a,b,c，則

(A)$a<b<c$的機率為$\frac{5}{54}$　(B)$a\le b\le c$的機率為$\frac{7}{27}$　(C)$a+b+c=11$的機率為$\frac{1}{8}$

(D)$(a-b)(b-c)=0$的機率為$\frac{11}{36}$

第二部分：綜合題（共 60 分）

一、填充題（每題 4 分，共 36 分）

1. 設$a\in R$，若$a+\log_2 3$，$a+\log_4 3$，$a+\log_8 3$是等比數列，求此等比數列的公比為 $\underline{\frac{1}{3}}$ 。

2. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}=$ $\underline{\ \frac{\pi}{4}\ }$ 。

3. 小花閒來無事，畫出一個 29×17 之棋盤。且從第一列開始，從左而右依次填入

1，2，3，…………，29；第二列填入 30，31，32，…………，58；依此類推將 493 個數字依次填入之後，小花又改為從第一行開始由上而下依次填入 1，2，3，……，17；第二行填入 18，19，20，…………，38；依此類推將 493 個數填完。則在這兩次填入數字的過程中，位置沒有改變的數字之總和為__1235__。

4. 正四面體 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 的重心分別為 M 與 N，已知 $\overline{MN}=2$，四面體 $ABCD$ 的內切球體積為__$\sqrt{6}\pi$__。

5. O 為坐標平面的原點，若 $\overrightarrow{OP}=(3\cos\alpha+\sin\beta,2\cos\alpha+4\sin\beta)$，$\frac{\pi}{6}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$，$0\le\beta\le\frac{\pi}{3}$，

則所有 P 點所形成的面積為 $\underline{\ \frac{15}{2}\ }$ 。

6. 有一遊戲規則為：袋中有 1 號、2 號、3 號…9 號球各一個，由袋中任抽兩球。若兩球的號碼，在下方的看板上，為同行且相鄰或同列且相鄰，則可以得到格子內金額的獎金；否則沒有獎金，例如：抽到 1 號、6 號則可得到 $1+6=7$ 元，投到 1 號、9 號就得到 0 元，則玩此遊戲乙次所得獎金的期望值為 $\underline{\ \frac{67}{18}\ }$ 。

1	6	2
5	9	7
4	8	3

7. 由 1、2、3、…、20 挑出 x_1，x_2，x_3 三個數，且 $x_1<x_2<x_3$；求 x_1 與 x_2 至少差 4，x_2 與 x_3 至少差 5 的機率為 $\underline{\ \frac{143}{570}\ }$ 。

8. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{AC}=3\sqrt{3}$，$\overline{BC}=\sqrt{21}$，由各邊分別向外作正三角形。已知此三個向外所作正三角形的重心會形成一個新的正三角形，求此新正三角形的面積為 $\underline{\ \frac{13\sqrt{3}}{4}\ }$ 。

9. 設 $x\in R$，求 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值為__$\sqrt{10}$__。

二、計算證明題(每題 8 分，共 24 分；必須詳列出計算過程)

1. (1)試將 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 因式分解。

(2)設 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 由(1)之結果，證明 $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$ 。

(3)設 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 且 $a+b+c=18$，由(2)之結果，試求出 $(a+1)(b+2)(c+3)$ 之最小值及此時之 a，b，c 之值。

2. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AB}$，$\angle B=54^\circ$，則 $\angle C=$？

3. 若 x、y、z 都是正數且滿足 $x+\frac{1}{y}=4$，$y+\frac{1}{z}=1$，$z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$，求 xyz 的值？