1. 已知a,b,c爲實數且滿足$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=12 \\ a^3+b^3+c^3=28 \end{cases}$。若$a>b>c$，則數對$(a,b,c)=$__________。

Sol.

由$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=12 \end{cases}$可得$ab+bc+ca=2$

由$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-b-bc-ca)=40$，故$abc=-4$

由根與係數可得以a,b,c為三根的三次方程式為$t^3-4t^2+2t+4=0$，

易得$t=2$為一根，$t^3-4t^2+2t+4=(t-2)(t^2-2t-2)=0$，

故$(a,b,c)=(1+\sqrt{3},2,1-\sqrt{3})$

2. 設多項式$f(x)=x^{2015}+x^{2014}+\cdots+x+1$，則試求$f(x^{2016})$除以$f(x)$所得的餘式爲__________。

Sol.

$$\begin{aligned} f(x^{20016}) &= (x^{2016})^{2015}+(x^{2016})^{2014}+(x^{2016})^{2013}+\cdots+(x^{2016})^2+(x^{2016})+1 \\ &= (x^{2016})Q(x)+r(x) \quad ,\deg r(x)<2016 \\ &= f(x)[(x-1)Q(x)]+r(x)\ ,\ \deg r(x)<2016 \end{aligned}$$

由廣義餘式定理，所求即為$f(1)=1+1+1+\cdots+1=2016$

3. 設$x>0$，求函數$f(x)=\sqrt{x^2+(\log x)^2}+\sqrt{(4-x)^2+(6+\log x)^2}$的最小值爲__________。

Sol.

令$P(x,\log x)$、$A(0,0)$、$P(4,-6)$

所求即為$\overline{PA}+\overline{PB}$之最小值，由三角不等式$\overline{PA}+\overline{PB}\ge\overline{AB}=2\sqrt{13}$

4. 設 G 爲 ΔABC 的重心，且通過 G 的一條直線交 $\overline{AB}$ 於 D，交 $\overline{AC}$ 於 E，則試求 $\dfrac{\Delta ADE}{\Delta ABC}$ 的最小值爲________。

Sol.

令 $\overline{AD}=a\overline{AB}$、$\overline{AE}=a\overline{AC}$，則 $\dfrac{\Delta ADE}{\Delta ABC}=ab$

由重心的向量式可得 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}\right)\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{b}\right)\overrightarrow{AE}$

又 G,D,E 三點共線，故 $\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{3b}=1$，

由算幾不等式可得 $\dfrac{\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}}{2}\geq\sqrt{\left(\dfrac{1}{3a}\right)\left(\dfrac{1}{3b}\right)}\Rightarrow ab\geq\dfrac{4}{9}$

$\therefore\dfrac{\Delta ADE}{\Delta ABC}$ 的最小值為 $\dfrac{4}{9}$

5. 設 $\overrightarrow{a}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{c}=(4,-4,1)$ 且 r,s 爲實數，則試求 $\left|r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|$ 的最小值爲

Sol.

法一：偏微分 $r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(r+4,r+2s-4,r-s+1)$

$\left|r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|=\sqrt{(r+4)^2+(r+2s-4)^2+(r-s+1)^2}$

對 r 偏微可得 $2(r+4)+2(r+2s-4)+2(r-s+1)=0$

對 s 偏微可得 $2(r+2s-4)\times2+2(r-s+1)\times(-1)=0$

可得 $r=-1,s=2$ 代回，故最小值為 $\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$

法二：幾何意義 視為 C 點至 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 所張成平面之距離

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(-3,1,2)$，張成之平面 $E:3x-y-2z=0$

$d(C,E)=\dfrac{|12+4-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\sqrt{14}$

6. 設 x, y, z 都是不為零的實數，且滿足 $\frac{4y-7z}{x}=\frac{2x-2z}{5y}=\frac{x+2y}{z}$，求 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$

Sol.

令 $\frac{4y-7z}{x}=\frac{2x-2z}{5y}=\frac{x+2y}{z}=k$ ， $k\in R$

可得 $\begin{cases} kx-4y+7z=0 \\ 2x-5ky-2z=0 \\ x+2y-kz=0 \end{cases}$ ，又 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 必為一解，故 $\Delta=0$

$\begin{vmatrix} k & -4 & 7 \\ 2 & -5k & -2 \\ 1 & 2 & -k \end{vmatrix}=0\Rightarrow k=-1$ 代回，所求為 $-\frac{41}{98}$

7. 若方程式 $36^x-6^{x+1}+a=0$ 有兩正實根，則求實數 a 的範圍為_

Sol.

原方程為 $(6^x)^2-6(6^x)+a=0$ ，可得 $\begin{cases} D=(-6)^2-4\times 1\times a\geq 0 \\ 6^\alpha+6^\beta>0 \\ (6^\alpha-1)(6^\beta-1)>0 \end{cases}\Rightarrow 5<a\leq 9$

8. 經過 $A(1,1,0)$、$B(2,1,1)$ 兩點的直線 L_1 與經過 $C(1,1,1)$、$D(1,3,2)$ 兩點的直線 L_2 為歪斜線。若另一直線 L_3 經過點 $E(2,0,1)$ 且與 L_1、L_2 均相交，試求 L_2 與 L_3 的交點坐標為__________。

Sol. 假設 L_1 和 L_3 交於 $P(1+t,1,t)$ ，假設 L_2 和 L_3 交於 $Q(1,1+2s,1+s)$

可得 $\overrightarrow{EP}=(t-1,1,t-1)$ 、 $\overrightarrow{EQ}=(-1,1+2s,s)$

$\overrightarrow{EP}$ 和 $\overrightarrow{EQ}$ 平行 $\frac{t-1}{-1}=\frac{1}{1+2s}=\frac{t-1}{s}$

由和分比可得 $\frac{t-1}{-1}=\frac{1}{1+2s}=\frac{t-1}{s}=\frac{-2(t-1)-1(0t+1)+2(t-1)}{-2(0s-1)-1(1+2s)+2s}=\frac{-1}{1}$

故 $1+2s=-1\Rightarrow s=-1$ ，可得 $Q(1,-1,0)$

9. 設a,b爲實數，若$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}$爲連續函數，求數對$(a，b)$

Sol. 由極限的定義可得

$$f(x)=\begin{cases}(1)\ \dfrac{1}{x} & ,x>1\\ (2)\ \dfrac{1+a+b}{2} & ,x=1\\ (3)\ ax+b & ,0<x<1\\ (4)\ ax+b & ,-1<x<0\\ (5)\ \dfrac{-1-a+b}{2} & ,x=-1\\ (6)\ \dfrac{1}{x} & ,x<-1\end{cases}$$

$f(x)$為連續函數，$f(x)$在$x=1$連續，可得$\dfrac{1+a+b}{2}=1=a+b$

$f(x)$為連續函數，$f(x)$在$x=-1$連續，可得$\dfrac{-1-a+b}{2}=-1=-a+b$

解聯立可得數對$(a,b)=(1,0)$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}=$______________。

Sol.

分子分母同乘$2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$，原式可化簡為$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$

令$a=\dfrac{1}{2^n}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{2a}{\sin(a\pi)}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a\pi}{\sin(a\pi)}\times\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{2}{\pi}$

11. 設 a 為實數，且點 $P(0,a)$ 為曲線 $\Gamma: y=x^3-9x^2+15x+7$ 外的一點。若過 P 點有相異的三條直線與 Γ 相切，則試求 a 的範圍為__________。

Sol.

令切點 $Q(t,t^3-9t^2+15t+7)$，則 $m_{\overline{PQ}}=\dfrac{(t^3-9t^2+15t+7)-a}{t-0}=3t^2-18t+15$

整理可得 $2t^3-9t^2+a-7=0$

令 $g(t)=2t^3-9t^2+a-7$，則 $g'(t)=6t^2-18t=6t(t-3)$

$g(t)=0$ 有三相異實根，故 $g(0)g(3)<0\Rightarrow(a-7)(a-34)<0\Rightarrow 0<a<34$

12. 設兩球體 $S_1: x^2+y^2+z^2\le 1$ 與 $S_2: x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$，求 S_1 與 S_2 重疊部分的體積為

Sol. 由球系可得其根平面為 $E: z=\dfrac{1}{4}$

可得小球為在 $E: z=\dfrac{1}{4}$ 上方的體積 $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\pi\left(\sqrt{1-h}\right)^2dh=\dfrac{27}{64}\pi$

可得大球為在 $E: z=\dfrac{1}{4}$ 下方的體積，等同於

$\int_{\frac{7}{4}}^{2}\pi\left(\sqrt{4-h}\right)^2dh=\dfrac{23}{192}\pi$，

故所求之體積為 $\dfrac{27}{64}\pi+\dfrac{23}{192}\pi=\dfrac{13}{24}\pi$

13. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，試求 $A^{100}=$__________。

Sol. 令 $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$、$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$A^{100}=(B+I)^{100}=C_0^{100}B^0+C_1^{100}B^1+C_2^{100}B^2+\cdots+C_{100}^{100}B^{100}==\begin{bmatrix}1&100&5050\\0&1&100\\0&0&1\end{bmatrix}$$

14. 已知$f(x)$是定義在實數集上的函數且$f(x+2)[1-f(x)]=1+f(x)$。若$f(1)=2+\sqrt{3}$，則試求$f(1989)=$______。

Sol. 由原式可得$f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$

$$f(3)=\frac{1+(2+\sqrt{3})}{1-(2+\sqrt{3})}=-\sqrt{3}\text{、}f(5)=\frac{1+(-\sqrt{3})}{1-(-\sqrt{3})}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$$

$$f(7)=\frac{1+(-2+\sqrt{3})}{1-(-2+\sqrt{3})}=\frac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{、}f(9)=\frac{1+(\frac{\sqrt{3}}{3})}{1-(\frac{\sqrt{3}}{3})}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

由上列推導可得 4 個一循環，$f(1989)$為第 995 項，故$f(1989)=-2+\sqrt{3}$

15. 一火車站有 5 個不同的入口處，每個入口處每次只能通過一人。今有 6 人進站，則共有______種不同進站方法。

Sol. 先討論每個入口處的人數，故有H_6^5種方法數

六個人有先後進入入口的順序，故有$6!$種方法，所求為$H_6^5\,6!$

16. 已知$x>1, y>1$且$(\log x)^2+(\log y)^2=2(\log x+\log y)$，則$x^{\log y}$的最大值爲______。

Sol. 原式可配方成$(\log x-1)^2+(\log y-1)^2=2$，令$k=x^{\log y}\Rightarrow \log k=\log x\log y$

由圓的參數式可得$\begin{cases}\log x=1+\sqrt{2}\cos\theta\\ \log y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$，其中$0\le\theta<2\pi$

$$\log x\log y=(1+\sqrt{2}\cos\theta)(1+\sqrt{2}\sin\theta)=1+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)+2\sin\theta\cos\theta$$

令$t=\sin\theta+\cos\theta$，其中$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$，

則原式即為$f(t)=t^2+\sqrt{2}t=\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$，$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

故$\log x\log y$之最大值為4，$k=x^{\log y}$之最大值為10000

17. 已知P點爲拋物線$x^2=4y+4$的頂點，$\overline{AB}$爲此拋物線上不過P點的一弦，且$\angle APB=90^\circ$，試求ΔAPB的最小面積爲________。

Sol. 令$\overleftrightarrow{AB}$：$y=mx+k$，

且$\overleftrightarrow{AB}$和Γ：$x^2=4y+4$交於$A\left(x_1,\dfrac{{x_1}^2-4}{4}\right)$ $B\left(x_2,\dfrac{{x_2}^2-4}{4}\right)$

$$\begin{cases}y=mx+k\\ x^2=4y+4\end{cases}\Rightarrow x^2-4mx-(4k+4)=0\quad\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=4m\\ x_1x_2=-(4k+4)\end{cases}$$

又$\angle APB=90^o\Rightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(x_1,\dfrac{{x_1}^2}{4}\right)\cdot\left(x_2,\dfrac{{x_2}^2}{4}\right)=0\Rightarrow x_1x_2=-16$

故$-(4k+4)=-16\Rightarrow k=3$

$$\Delta PAB=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & \dfrac{{x_1}^2}{4}\\ x_2 & \dfrac{{x_2}^2}{4}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{8}|x_1x_2||x_2-x_1|=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{16m^2+64}$$

故ΔPAB之最大面積為16

18. P_k表$1,2,3,\cdots,n$中任取k個數乘積的和，求$1+P_1+P_2+\cdots+P_n=$________。(以n表示)

Sol.

考慮多項式$f(x)$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots[x+(n-1)](x+n)\\&=x^n+P_1x^{n-1}+P_2x^{n-2}+P_3x^3+\cdots+P_{n-2}x^2+P_{n-1}x+P_n\end{aligned}$$

所求即為$1+P_1+P_2+P_3+\cdots+P_{n-2}+P_{n-1}+P_n$

$$=f(1)=(1+1)(1+2)(1+3)\cdots[1+(n-1)](1+n)=(n+1)!$$

19. 若複數 z_1, z_2 滿足 $|z_1|=2$, $|z_2|=3$, $3z_1-2z_2=\frac{3}{2}-i$，求 $z_1\cdot z_2=$__________。

Sol. 令 $z_1=2(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_2=3(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

又 $3z_1-2z_2=\frac{3}{2}-i\Rightarrow\begin{cases}6(\cos\theta-\cos\varphi)=\frac{3}{2}\\6(\sin\theta-\sin\varphi)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta-\cos\varphi=\frac{1}{4}\\\sin\theta-\sin\varphi=-\frac{1}{6}\end{cases}$

由和差化積可得 $\begin{cases}-2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)=\frac{1}{4}\\2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)=-\frac{1}{6}\end{cases}$

兩式相除，可得 $\tan\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)=\frac{3}{2}$ ，

所求 $z_1z_2=6[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)]=\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+i\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=-\frac{30}{13}+\frac{70}{13}i$

20. 如參考圖，共有 6 個圓圈相連在一起，現有某人從 A 走至 B，所有路徑均須走過，且不得重複，則共有__________種方法。(本題答案可用次方與階乘表示)

Sol.

從 C 走到 P 之後有 $\begin{cases}C\\D\end{cases}$ 兩種選法(回頭或向前)2 種方法

故所求即為 $(3!)\times2^5$

1. 已知ΔABC內一點P到三邊$\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$的距離分別爲x, y, z且$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$，又ΔABC的面積爲S，

則：(1)求xyz的最大值與此時P點的位置？(4 分)

(2)求$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$的最小值與此時$P$點的位置？(4 分)

Sol. (1) $\because \frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}cz=S \Rightarrow ax+by+cz=2S$

由算幾不等式可得

$$\frac{ax+by+cz}{3} \geq \sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \Rightarrow \frac{2S}{3} \geq \sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \Rightarrow \frac{8S^3}{27abc} \geq xyz$$

此時$\frac{1}{2}ax=\frac{1}{2}by=\frac{1}{2}cz$，也就是說三塊面積相等，故$P$點為重心

(2)由科西不等式可得 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz) \geq (a+b+c)^2$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2S}$$

此時$\frac{ax}{\left(\frac{a}{x}\right)}=\frac{by}{\left(\frac{b}{y}\right)}=\frac{cz}{\left(\frac{c}{z}\right)} \Rightarrow x=y=z$，故$P$點為內心

2. 求函數$f(x)=|\sin x|+\sin^4 2x+|\cos x|$之最大值與最小值？(7 分)

Sol.

$$f(x)=|\sin x|+|\cos x|+(2\sin x\cos x)^4=|\sin x|+|\cos x|+16(|\sin x||\cos x|)^4$$

令$t=|\sin x|+|\cos x|$，其中$1 \leq t \leq \sqrt{2}$

$\because\ t^2=1+2|\sin x||\cos x|=1+|\sin 2x| \Rightarrow 0 \leq |\sin 2x|=t^2-1 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2}$

原式即為 $f(t)=t+(t^2-1)^4,\ 1 \leq t \leq \sqrt{2}$

又 $f'(t)=1+4(t^2-1)^3 \times 2t=1+8t(t^2-1)^3>0,\ 1 \leq t \leq \sqrt{2}$

故 $f(t)$在閉區間$[1,\sqrt{2}]$是遞增函數 $M=\sqrt{2}+1$

$m=1$