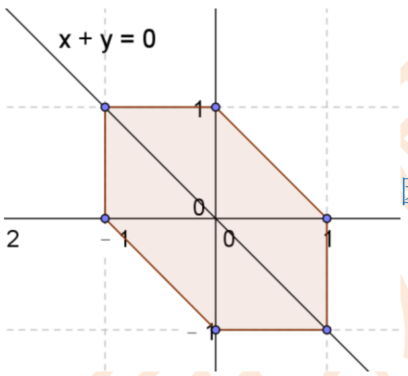
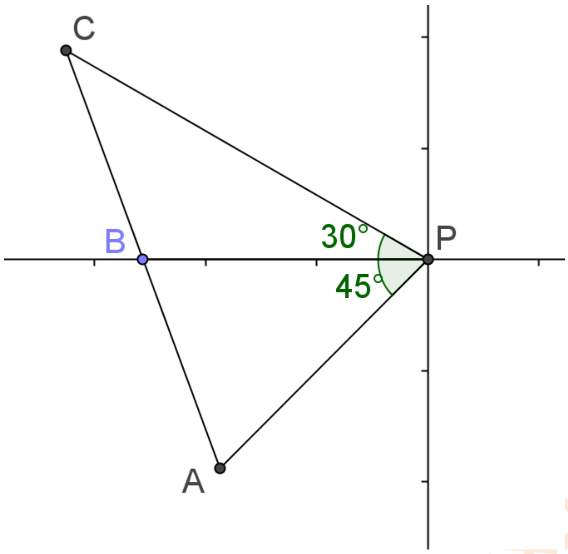
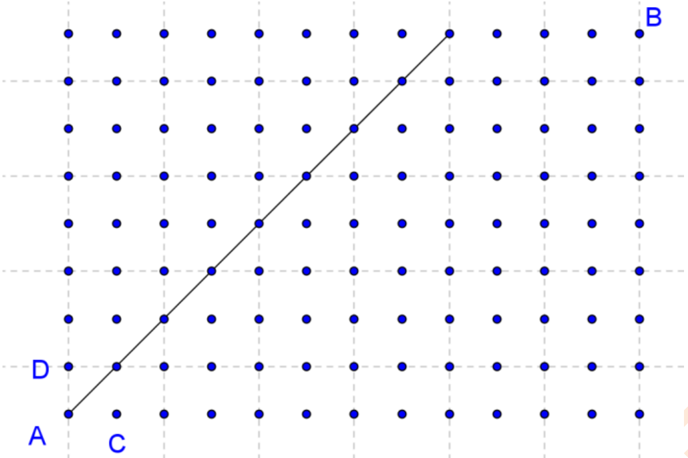
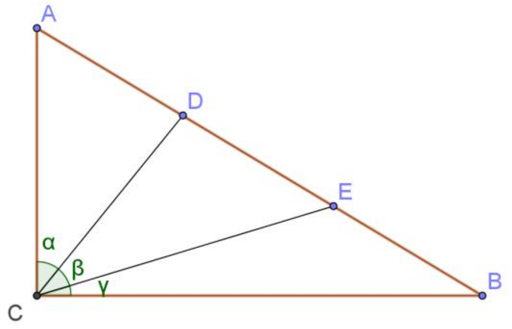
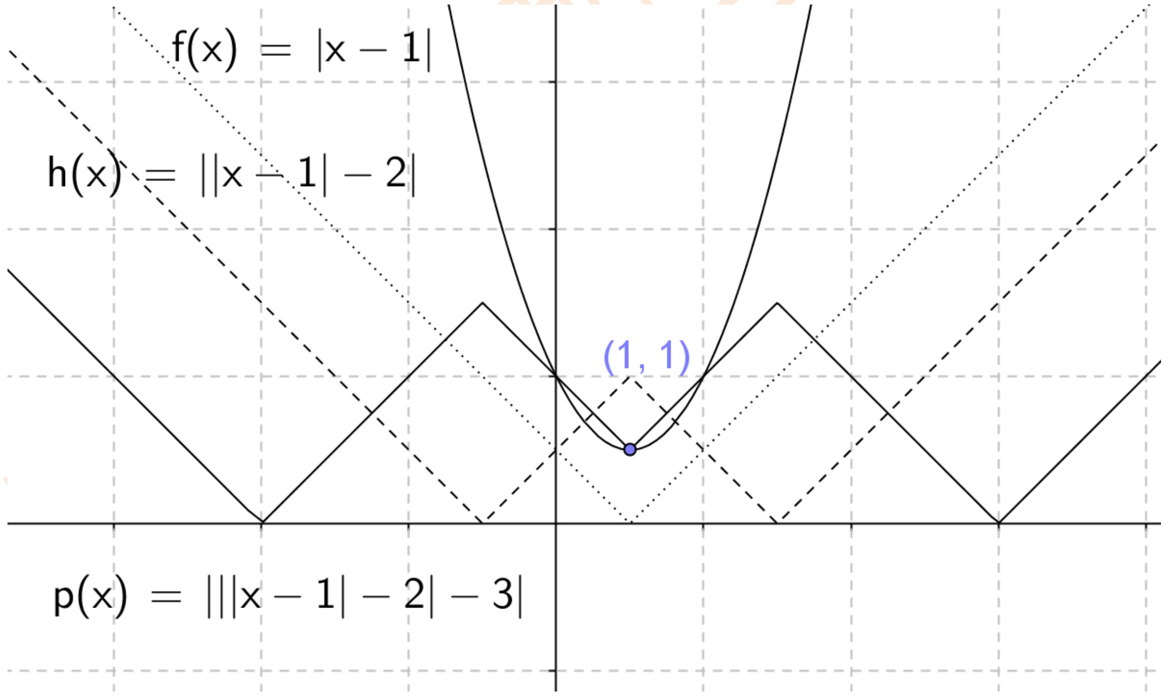
1	設 $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$，則 $\log_{16}(x^3-6x+2)=$ ？ 【解答】$\frac{3}{4}$ 【詳解】令 $a=\sqrt[3]{4},b=\sqrt[3]{2}$，則 $x^3=(a+b)^3=4+3\times2\times(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})+2$，可知 $x^3=6+6x$ 所以 $\log_{16}(x^3-6x+2)=\log_{16}8=\frac{3\log2}{4\log2}=\frac{3}{4}$	104 鳳 山 高 中	1		A 0 0 8 6
1	坐標平面上，不等式 $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert+\lvert x+y\rvert\le2$ 所圍成之區域面積為？ 【解答】3 【詳解】考慮四個象限與 $x+y=0$ 。 若 $x\ge0,y\ge0,x+y\ge0$ ，可得圖形 $2x+2y\le2$ 。 若 $x<0,y<0,x+y<0$ ，可得圖形 $-2x-2y\le2$ 。 若 $x\ge0,y<0,x+y\ge0$ ，可得圖形 $x+(-y)+x+y\le2\Rightarrow x\le1$ 。 若 $x\ge0,y<0,x+y<0$ ，可得圖形 $x+(-y)-(x+y)\le2\Rightarrow y\ge-1$ 。 若 $x<0,y\ge0,x+y\ge0$ ，可得圖形 $-x+y+x+y\le2\Rightarrow y\le1$ 。 若 $x<0,y\ge0,x+y<0$ ，可得圖形 $-x+y-(x+y)\le2\Rightarrow x\ge-1$ 。  因此面積為 3。	104 鳳 山 高 中	2		A 0 0 8 7

1	設 A、B、C 依序為一筆直公路上之相異三點，$\overline{AB}=\overline{BC}=1$ 公里，從此三點觀測塔 P，在 A 處測得塔在其東北方向，在 B 處測得塔在其正東方向，在 C 處測得塔在其南偏東 60° 方向，則塔 P 與此筆直公路之最短距離為幾公里 ？ 【解答】$\frac{7+5\sqrt{3}}{13}$ 【詳解】 由於 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$，可知面積 $\Delta ABP=\Delta BCP$，$\frac{1}{2}\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\overline{PC}\cdot\overline{PB}\cdot\sin 30^\circ$ 可得 $\overline{PC}=\sqrt{2}\,\overline{PA}$。 令 $\overline{PA}=x$，代餘弦定理 $\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{x^2+(\sqrt{2}x)^2-2^2}{2\cdot x\cdot\sqrt{2}x}$，可解得 $x^2=\frac{16+4\sqrt{3}}{13}$。 設最短距離為 h，可視為 ΔPAC 中 $\overline{AC}$ 上的高，因此 ΔPAC 面積 $\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{2}x^2\cdot\sin 75^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot h$，可解得 $h=\frac{7+5\sqrt{3}}{13}$	104 鳳 山 高 中	3		A 0 0 8 8

1	設 n 為正整數，$[x]$ 表不大於 x 之最大整數，$\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\left[\sqrt[3]{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{n}\right]=3n$，則 n=？ 【解答】96 【詳解】n 個數字相加和為 3n，平均每個數為 3，所以想法是將$\left[\sqrt[3]{k}\right]=4$多的 1 補去$\left[\sqrt[3]{k}\right]=2$與$\left[\sqrt[3]{k}\right]=1$。 易知使得$\left[\sqrt[3]{k}\right]=1$的 k 值有 7 個，$\left[\sqrt[3]{k}\right]=2$的 k 值有$26-7=19$個，相當於要用$\left[\sqrt[3]{k}\right]=4$補上$26+7=33$，需要 33 個能使$\left[\sqrt[3]{k}\right]=4$ 的 k 值，最小的 k 為 64，所以$n=64+33-1=96$。	104 鳳山高中	4		A0089
1	曲線$y^2=4-2x$與直線$2x+y=2$ 所圍成之區域面積為 ？ 【解答】$\frac{9}{4}$ 【詳解】改寫為$x=\frac{4-y^2}{2}$與$x=\frac{2-y}{2}$，解$4-y^2=2-y$，得$y=2,-1$，交點的 y 值為$2,-1$。 因此區域面積為$\int_{-1}^{2}\frac{4-y^2}{2}-\frac{2-y}{2}dy \ =\frac{9}{4}$。	104 鳳山高中	5		A0090
1	已知有 95 個數字$a_1,a_2,\ldots.,a_{95}$，每個數字只能取值$+1$ 或-1其中一個，則這些數字兩兩乘積之和的最小正值為？ 【解答】13 【詳解】設有 k 個 1，95-k 個-1，則兩兩乘積之和 $\sum_{i<j}a_ia_j=\frac{(\sum_{i=1}^{95}a_i)\times(\sum_{i=1}^{95}a_i)-\sum_{i=j}a_ia_j}{2}=\frac{(2k-95)^2-95}{2}$，解$(2k-95)^2\geq 95$的最小正整數 k，可知$(2k-95)^2\geq 10^2$，可得$k\geq 52.5 or k\leq 42.5$ ，取$k=53 or 42$時有最小值，此最小值為$\frac{(2\times 53-95)^2-95}{2}=13$ 。	104 鳳山高中	6		A0091

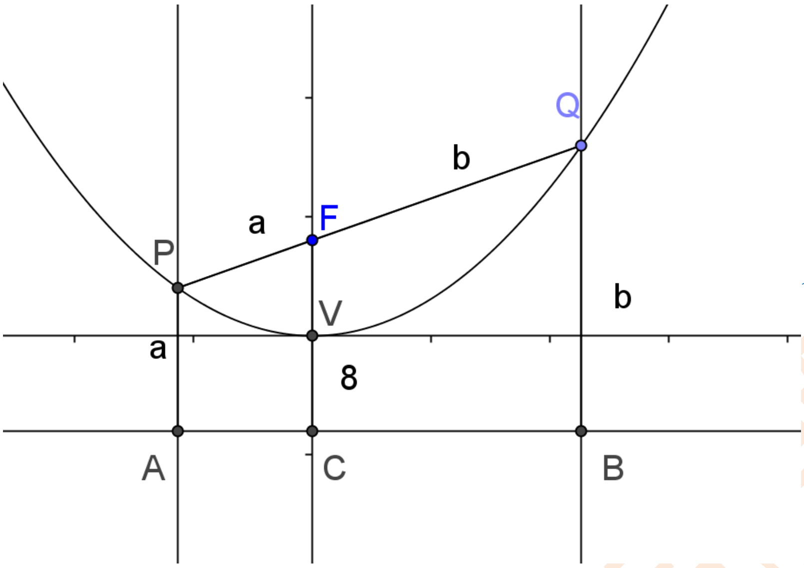
1	袋中有 12 個白球，8 個紅球，每次隨機取出一球，取出後不放回，直到所有球取完為止，在取球的過程中，發生取出白球與紅球個數相等的事件為 A，則 $P(A)$=？ 【解答】$\frac{4}{5}$ 【詳解】$P(A)=1-P(白恆多於紅)$，其中白球恆多於紅球的機率，可視為由 A 點向右 12 步，向上 8 部，走到 B 點的方法數中，不經過斜線上的點 P_i 的機率。  由圖中可知 $P(A\to D\to B)+P(A\to C\to B)=1$，其中 $P(A\to D\to B)=\dfrac{\frac{19!}{7!12!}}{\frac{20!}{8!12!}}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$，加上由於 C、D 兩點對稱，可知 $P(A\to D\to B)=P(A\to D\to P_i\to B)=P(A\to C\to P_i\to B)=\frac{2}{5}$，因此白球恆多於紅球的機率 $1-P(A\to D\to B)-P(A\to C\to P_i\to B)=1-2\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，所求為 $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$。	104 鳳 山 高 中	7			A 0 0 9 2

1	在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，D、E 兩點在邊 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$，若 $\angle ACD=\alpha$，$\angle DCE=\beta$，$\angle ECB=\gamma$，則 $\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}=$ ？ 【解答】$\dfrac{1}{3}$ 【詳解】 設 ΔABC 面積為 S，利用 $\Delta ADC=\Delta DCE=\Delta ECB=\dfrac{1}{3}S$，可知 $\dfrac{\Delta ADC\times\Delta ECB}{\Delta DCE}=\dfrac{1}{3}S$。利用三角形面積公式可換 成 $\dfrac{\frac{1}{2}\overline{CA}\times\overline{CD}\times\sin\alpha\times\frac{1}{2}\overline{CE}\times\overline{CB}\times\sin\gamma}{\frac{1}{2}\overline{CD}\times\overline{CE}\times\sin\beta}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\overline{CA}\times\overline{CB}\times\sin 90°$，約分整理即可得到 $\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}=\dfrac{1}{3}$	104 鳳 山 高 中	8			A 0 0 9 3
1	設 $P(x,y)$ 為雙曲線 $9x^2-16y^2=144$ 上一點，且 P 點在第一象限內，則 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x\lvert 3x-4y\rvert}=$ ？ 【解答】$2\sqrt{6}$ 【詳解】$9x^2-16y^2=144$ 即 $(3x-4y)(3x+4y)=144$ 因P在第一象限，因此 $3x-4y=\dfrac{144}{3x+4y}>0$，又 $16y^2=9x^2+144$，可得 $4y=\sqrt{9x^2+144}$ 代入所求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x\lvert 3x-4y\rvert}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x\cdot\dfrac{144}{3x+4y}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{144x}{3x+\sqrt{9x^2+144}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{144x}{3x+3x}}=\sqrt{24}$ 。	104 鳳 山 高 中	9			A 0 0 9 4

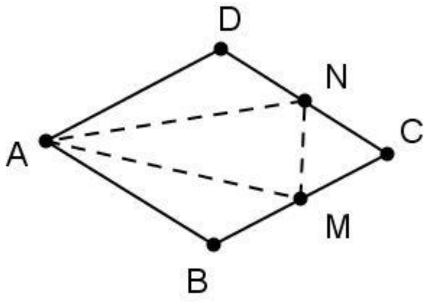
1	已知直線 $y=2x+k$ 與 $y=x^3-x+1$ 的圖形交於相異三點，至少有一交點的 x 座標大於 $\frac{3}{2}$ ，則實數 k 之範圍為？ 【解答】 $-\frac{1}{8}<k<3$ 【詳解】令 $f(x)=x^3-x+1-(2x+k)=x^3-3x+(1-k)$，則 $f(x)=0$ 有相異三解，且因 $f(x)$ 領導系數為正，若 $f(\frac{3}{2})<0$ 則可使至少有一交點的 x 座標大於 $\frac{3}{2}$ 。 利用三次方程式判別式 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ ，可知 $\frac{(1-k)^2}{4}-1<0$ ， $-1<k<3$ 。 又 $f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{8}-k<0$ ，可知 $-\frac{1}{8}<k$ 。所以 $-\frac{1}{8}<k<3$ 。	104 鳳 山 高 中	1 0		A 0 0 9 5
1	設 a 為實數，已知滿足方程式 $\|\|x-1\|-2\|+a\|=x^2-2x+2$ 的相異實數 x 共有 3 個，則 a=？ 【解答】-3 【詳解】  如圖，由於絕對值圖形對稱於 $x=1$ ，拋物線 x^2-2x+2 也是對稱於 $x=1$ ，因此焦點數目一般而言會是偶數個，除非剛好交於頂點。 所以令 $x=1$ 代入 $\|\|x-1\|-2\|+a\|=x^2-2x+2$ ，可解出 $a=-3$ 。	104 鳳 山 高 中	1 1		A 0 0 9 6

1	使得 $20n^2+9n+1$ 為完全平方數(即某個整數的平方)的最小正整數 n=？ 【解答】72 【詳解】$20n^2+9n+1\equiv n+1 \pmod 4$ 因完全平方數 $\equiv 0 or 1 \pmod 4$，所以 $n\equiv 0 or 3 \pmod 4$ $20n^2+9n+1=(4n+1)(5n+1)$，將 $n=3,4,7,8,....$ 代入，可得當 n=72， $20n^2+9n+1=289\times 361=(17\times 19)^2$ 【備註】真的沒有快一點的方法嗎？	104 鳳 山 高 中	1 2		A 0 0 9 7

1	若三次方程式 $x^3-x^2+2x-3=0$ 的三個根分別為 a,b,c ，則 $\dfrac{a^3}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{b^3}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{c^3}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=$ ？ 【解答】-2 【詳解】由根與係數可知 $a+b+c=1,ab+bc+ca=2,abc=3$ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-3$ 考慮多項式 $f(x)=\dfrac{(x-b^2)(x-c^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{(x-a^2)(x-c^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{(x-a^2)(x-b^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$ ，此多項式次數不超過 2。當 $x=a^2,b^2,c^2$， $f(x)$ 皆為 1，因此可知 $f(x)$ 為常數多項式 $f(x)=1$。 因此 $f(x)$ 的平方項係數 $\dfrac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{1}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{1}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=0$ ， 一次項係數 $\dfrac{b^2+c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{c^2+a^2}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{a^2+b^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=0$ 又因 $a^2+b^2+c^2=-3$，可將一次項係數換為 $\dfrac{-a^2-3}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{-b^2-3}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{-b^2-3}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=0$ 利用 $a^3-a^2+2a-3=0$ 等式子，可將所求換成 $\dfrac{a^3}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{b^3}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{c^3}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$ $=\dfrac{a^2-2a+3}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{b^2-2b+3}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{c^2-2c+3}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$ $=-2\left[\dfrac{a}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{b}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{c}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\right]$ 將上式通分整理可得 $-2\left[\dfrac{ac^2-ab^2+ba^2-bc^2+cb^2-ca^2}{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)}\right]$ ，其中 $ac^2-ab^2+ba^2-bc^2+cb^2-ca^2=-(a-b)(b-c)(c-a)$，約分可得 $\dfrac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ 。 換成 $\dfrac{2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$ ，可將分母視為原方程式 $x^3-x^2+2x-3=0$ 代入 1 的情況，因此所求為 $\dfrac{2}{-1}=-2$ 。	104 鳳 山 高 中	1 3		A 0 0 9 8

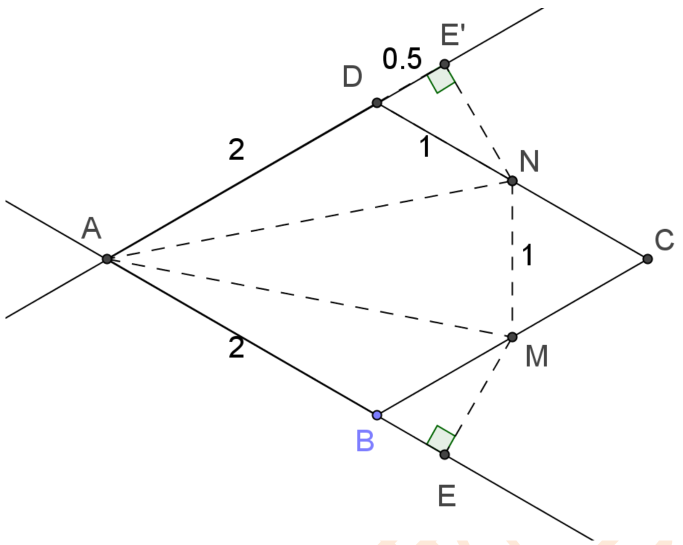
1	已知拋物線Γ的焦點為 F，頂點為 V，$\overline{VF}=4$ ，P、Q 為Γ上二點，且$\overline{PQ}$過 F，若 $\overline{PQ}=18$，則$\left\|\overline{PF}-\overline{QF}\right\|=$ ？ 【解答】6 【詳解】令 P、Q、F 投影至準線的投影點分別為 A、B、C，則可知 $\overline{PA}=\overline{PF}=a,\overline{QB}=\overline{QF}=b$ ，$\overline{FC}=8$，且 ABQC、ACFP、CBQF 皆為梯形，不失一般性令 $b>a$ ，可知 $(b-a):(8-a)=a+b:a$，且 $\overline{PQ}=a+b=18$ ，可解得 $a=6,b=12$ 。	104 鳳 山 高 中	1 4		A 0 0 9 9
1	已知實數 x、y、a、b 滿足 $\begin{cases} ax+by=1 \\ ax^2+by^2=2 \\ ax^3+by^3=8 \\ ax^5+by^5=100 \end{cases}$ ，則 $ax^4+by^4=$ ？ 【解答】4 或 28 【詳解】令數列 $<a_n>$ ，$a_n=ax^n+by^n=(ax^{n-1}+by^{n-1})(x+y)-xy(ax^{n-2}+by^{n-2})$ ，因此可設 $a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}$ 。 令 $ax^4+by^4=k$ ，則有 $\begin{cases} 8=2p+q \\ k=8p+2q \\ 100=kp+8q \end{cases}$ ，運用行列式的運算讓第三行全部為 0，解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & k \\ 8 & k & 4 \end{vmatrix}=0$ ，可得 $k=4,28$ 。	104 鳳 山 高 中	1 5		A 0 1 0 0

1	如圖之菱形 $ABCD$ ，已知 $\angle B=120°$，M 為 $\overline{BC}$ 中點，N 為 $\overline{CD}$ 中點，分別以虛線 $\overline{AN},\overline{AM},\overline{MN}$ 為折線，將 $\Delta ADN,\Delta ABM,\Delta CMN$ 往上折，使 B、C、D 折至同一點 P，形成一個四面體 PAMN，設平面 PAN 與平面 PAM 之銳夾角為 θ，則 $\cos\theta=$ ？	104 鳳山高中	1 6			A0101



【解答】$\dfrac{1}{3}$

【詳解】



延長 AB、AD，分別做

$\overline{ME}\perp\overleftrightarrow{AB}$ 於 E，$\overline{NE'}\perp\overleftrightarrow{AD}$ 於 E'，則往上折會將 E,E' 重疊，所求 θ 即為 $\angle MEN$ 。

利用 $\angle B=120°$，設菱形邊長為 2，可知 $\overline{ME}=\overline{NE'}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $\overline{MN}=1$，所以

$$\cos\theta=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-1^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$$