

臺北市立大安高級工業職業學校 99 學年度第 2 次教師甄選 數學科【高中數學】筆試試題

- 作答說明：1. 請在彌封之答案卷上標明題號依序作答，答案卷上不得書寫姓名或作任何記號。
2. 全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。
3. 作答時間共 90 分鐘。
4. 本試題滿分共 100 分，依各題配分計分。
5. 交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。

第一部份：偵錯題(每題 6 分，共計 60 分)

說明：此大題為本校學生常犯的錯誤解法，請您觀察找出學生的錯誤，並請在答案卷上指出錯誤的關鍵，及寫出題目正確的詳解。

1. 題目：設 $a \in R$ ，二次方程式 $4x^2 + 2a(2i-1)x - (a^2i+1) = 0$ 有實數解，求 a 值範圍？

天兵學生甲：利用判別式大於等於零， $a^2(2i-1)^2 + 4(a^2i+1) = 0$ 解得 $\frac{-2}{3}\sqrt{3} \leq a \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 。

2. 題目：已知 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2$ ，求 $\begin{vmatrix} 5\alpha-7\beta & 4\alpha+3\beta \\ 5\gamma-7\delta & 4\gamma+3\delta \end{vmatrix} = ?$

天兵學生乙： $\therefore \begin{vmatrix} 5\alpha-7\beta & 4\alpha+3\beta \\ 5\gamma-7\delta & 4\gamma+3\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\alpha & 4\alpha \\ 5\gamma & 4\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7\beta & 3\beta \\ -7\delta & 3\delta \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$ 。

3. 題目：甲乙丙丁戊己庚等 7 人排成一列，求當規定甲乙相鄰，丙丁不相鄰之排列方法數？

天兵學生丙：Step1：戊己庚任意排有 $3!$ 種。

Step2：丙丁插入有 P_2^4 種。

Step2：將 甲乙 視為一體再插入有 $P_1^6 \cdot 2!$ 種。

最後將 $3! \cdot P_2^4 \cdot P_1^6 \cdot 2! = 864$ 得到解為 864 種方法數。

4. 題目：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2+n}} \right)$ 之值？

天兵學生丁：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2+2}} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2+n}} = 0$ 。

5. 題目：設 $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ ，求 $f'(0)$ 值為何？

天兵學生戊： $\therefore f(x) = \sqrt{x^4+x^2}$ ， $\therefore f'(x) = \frac{4x^3+2x}{2\sqrt{x^4+x^2}}$ ，因此得 $f'(0)$ 無意義。

6. 題目：設 $a > 0, b > 0, c > 0$ ，求 $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c})$ 之最小值？

天兵學生己： $\because a > 0, b > 0, c > 0$ ， $\therefore a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ 且 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{abc}}$

$$\rightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c}) \geq 9\sqrt[3]{8} = 18, \therefore \text{最小值為 } 18。$$

7. 題目：試求過二圓 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 與 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ 之交點且與直線 $y+1=0$ 相切之圓方程式？

天兵學生庚：由圓系觀念，令所求之圓方程式為 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 + k(x^2 + y^2 - 1) = 0$ 。

\because 與 $y+1=0$ 相切， $\therefore y=-1$ 代入上式得 $(k+1)x^2 - 4x + 8 = 0$ ，再利用判別式等於零

$$\text{得 } 16 - 32(k+1) = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{2} \quad \text{代回原假設得圓方程式為 } x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$$

8. 題目：求複數 i 的平方根？

天兵學生辛： $\pm\sqrt{i}$ 。

9. 題目：求 $z = 1 + \cos 200^\circ + i \sin 200^\circ$ 之主幅角 $Arg(z) = ?$

天兵學生壬： $1 + \cos 200^\circ + i \sin 200^\circ = 1 + 2\cos^2 100^\circ - 1 + i \cdot 2\sin 100^\circ \cdot \cos 100^\circ = 2\cos 100^\circ (\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$

$$\therefore Arg(z) = 100^\circ。$$

10. 題目：設 $A(-1, 5, 3), B(0, 10, 2)$ 及平面 $E: x - 4y - z + 6 = 0$ ，則線段 \overline{AB} 在平面 E 之投影長度值為何？

天兵學生癸： $\because \overline{AB} = (1, 5, -1)$ 且法向量 $\vec{n} = (1, -4, -1)$ ，則 $\cos \theta = \frac{\overline{AB} \cdot \vec{n}}{|\overline{AB}| |\vec{n}|} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ，

$$\therefore \text{投影長} = |\overline{AB}| \times |\cos \theta| = \sqrt{27} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{2}。$$

第二部份：計算題(每題 5 分，共計 40 分)

1. 設 $\log_2 x - x + 4 = 0$ 之根為 α ， $2^x - x + 4 = 0$ 之根為 β ，求 $\alpha + \beta$ 之值？

2. 一橢圓之中心在原點，長軸在 x 軸上，若此橢圓內切於梯形 $ABCD$ ， $\overline{AD} \parallel x$ 軸且

$\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{CD} = 5$ ， $\overline{BC} = 11$ ，則橢圓之正焦弦長為何？

3. 設函數 $f(x) = \cos x \cdot \sin^3 x$ 的極大值為 M ，極小值為 m ，則求數對 (M, m) 之值為何？(Hint: 算幾不等式)
4. 四面體 $PABC$ ，今若以 P 為球心， \overline{PA} 為半徑作一球面，則 B 與 C 也同時落在球面上，且知 $\overline{PA} = \sqrt{10}$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 5$ 及 $\overline{AB} = 6$ ，試求點 P 至平面 ABC 的距離為何？
5. O 為原點， $\square OABC$ 為正方形，已知點 $P(2,0)$ 在 AB 邊上，點 $Q(\sqrt{3},1)$ 在 BC 邊上，則正方形面積為何？
6. 甲袋中有 1 紅球 3 白球，乙袋中有 4 白球，每次每球被取到的機會均相等，若自甲袋中取一球放入乙袋，再從乙袋中取一球放回甲袋，此稱為一回合，再長久的操作之下，紅球留在甲袋的機率為何？
7. 令 $A(2, 3)$, $B(0, 0)$, $C(4, 0)$ ， P 為圓 $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 46 = 0$ 上的點，若 $|\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}|$ 有最大值時，則 P 點座標為何？
8. 設 $a > 0$ 點 $P(2a, a^2)$ 在 $\Gamma: y = \frac{1}{4}x^2$ 上，又點 Q 在 x 軸正向上且 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ ，直線 \overline{PQ} 交 y 軸於 R 點，當點 P 沿曲線 Γ 趨近於原點時，則點 R 的極限位置座標為何？

【試題到此結束，祝 您考試順利！】