

編 號

-----彌-----封-----線-----

壹、填充題一：(每格 4 分，共 60 分)

1. 已知 a, b, c 為實數且滿足
$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=12 \\ a^3+b^3+c^3=28 \end{cases}$$
。若 $a > b > c$ ，則數對 $(a, b, c) =$ _____。

2. 設多項式 $f(x) = x^{2015} + x^{2014} + \dots + x + 1$ ，則試求 $f(x^{2016})$ 除以 $f(x)$ 所得的餘式為_____。

3. 設 $x > 0$ ，求函數 $f(x) = \sqrt{x^2 + (\log x)^2} + \sqrt{(4-x)^2 + (6+\log x)^2}$ 的最小值為_____。

4. 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，且通過 G 的一條直線交 \overline{AB} 於 D ，交 \overline{AC} 於 E ，則試求 $\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}$ 的最小值為_____。

5. 設 $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ， $\vec{b} = (0, 2, -1)$ ， $\vec{c} = (4, -4, 1)$ 且 r, s 為實數，則試求 $\left| r\vec{a} + s\vec{b} + \vec{c} \right|$ 的最小值為_____。

6. 設 x, y, z 都是不為零的實數，且滿足 $\frac{4y-7z}{x} = \frac{2x-2z}{5y} = \frac{x+2y}{z}$ ，求 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} =$ _____。

7. 若方程式 $36^x - 6^{x+1} + a = 0$ 有兩正實根，則求實數 a 的範圍為_____。

8. 經過 $A(1, 1, 0)$ 、 $B(2, 1, 1)$ 兩點的直線 L_1 與經過 $C(1, 1, 1)$ 、 $D(1, 3, 2)$ 兩點的直線 L_2 為歪斜線。
若另一直線 L_3 經過點 $E(2, 0, 1)$ 且與 L_1 、 L_2 均相交，試求 L_2 與 L_3 的交點坐標為_____。

9. 設 a, b 為實數，若 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax + b}{x^{2n} + 1}$ 為連續函數，求數對 $(a, b) =$ _____。

編 號

-----彌-----封-----線-----

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 設 a 為實數，且點 $P(0, a)$ 為曲線 $\Gamma: y = x^3 - 9x^2 + 15x + 7$ 外的一點。若過 P 點有相異的三條直線與 Γ 相切，則試求 a 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 設兩球體 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 與 $S_2: x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ ，求 S_1 與 S_2 重疊部分的體積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 $A^{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知 $f(x)$ 是定義在實數集上的函數且 $f(x+2)[1-f(x)] = 1+f(x)$ 。若 $f(1) = 2 + \sqrt{3}$ ，則試求 $f(1989) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 一火車站有 5 個不同的入口處，每個入口處每次只能通過一人。今有 6 人進站，則共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種不同進站方法。

貳、填充題二：(每格 5 分，共 25 分)

16. 已知 $x > 1, y > 1$ 且 $(\log x)^2 + (\log y)^2 = 2(\log x + \log y)$ ，則 $x^{\log y}$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 已知 P 點為拋物線 $x^2 = 4y + 4$ 的頂點， \overline{AB} 為此拋物線上不過 P 點的一弦，且 $\angle APB = 90^\circ$ ，試求 $\triangle APB$ 的最小面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

編 號

-----彌-----封-----線-----

18. P_k 表 $1, 2, 3, \dots, n$ 中任取 k 個數乘積的和，求 $1 + P_1 + P_2 + \dots + P_n =$ _____。(以 n 表示)

19. 若複數 z_1, z_2 滿足 $|z_1| = 2, |z_2| = 3, 3z_1 - 2z_2 = \frac{3}{2} - i$ ，求 $z_1 \cdot z_2 =$ _____。

20. 如參考圖，共有 6 個圓圈相連在一起，現有某人從 A 走至 B ，所有路徑均須走過，且不得重複，則共有 _____ 種方法。(本題答案可用次方與階乘表示)



參、計算證明題：(共 15 分)

1. 已知 ΔABC 內一點 P 到三邊 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 的距離分別為 x, y, z 且 $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ ，又 ΔABC 的面積為 S ，

則：(1) 求 xyz 的最大值與此時 P 點的位置？(4 分)

(2) 求 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ 的最小值與此時 P 點的位置？(4 分)

2. 求函數 $f(x) = |\sin x| + \sin^4 2x + |\cos x|$ 之最大值與最小值？(7 分)