# 國立彰化高級中學 104 學年度 第一次教師甄選 數學科 答案卷

說明: (A)測驗時間: 120 分鐘

(B)第 1 題到第 13 題，每題 7 分；第 14 題 9 分；滿分 100 分。

答案卷上請標題號，需計算過程(或想法)，否則，斟酌給分。

1.根據

$$(\cos 7\theta + i\sin 7\theta)^1 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \sum_{k=0}^{n} i^{n-k}\binom{7}{k}cos^k\theta sin^{n-k}\theta$$

所以$\tan 7\theta = \frac{7t-35t^3+21t^5-t^7}{1-21t^2+35t^4-7t^6}$，其中$t=\tan\theta$，

又$\tan 7\theta = 0$有 7 個根，恰為$\frac{k\pi}{7}$，k=0,1,2,3,4,5,6，

所以$t^6-21t^4+35t^2-7=0$，有 6 根，為 $\tan\frac{k\pi}{7}$，k=1,2,3,4,5,6，

根據根與係數，6 根積為$-7$，所以$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$

2.$(1+x)^n = 1+\frac{nx}{1!}+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+\cdots$，$x=\frac{1}{n}$代入

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$=3≤ n，

所以 $(n+1)^n < n^{n+1}$

3.令 $a=\sqrt{1648+x^3}$，$b=\sqrt{4949-x^3}$，所以$a-b=75$，所以$a^2+b^2=6597$，

則$ab=486$，$a+b=\sqrt{7569}=87$，所以$a=81$

$$x^3=4913，x=17$$

4. $\sum_{k=1}^{n}\frac{5^kC_k^n}{k}=\sum_{k=1}^{n}5^k\frac{C_{k+1}^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{5(n+1)}\sum_{k=1}^{n}5^{k+1}C_{k+1}^{n+1}\approx\frac{6^{n+1}}{5(n+1)}$(略小)

所以$\frac{6^{n+1}}{5(n+1)}>6^{2015}$ 相當於$6^{n-2014}>5(n+1)$， $6^5<5(2020)$，

而$6^6>5(2021)$，所以 n=2020

5. $f(x)=\int_x^{x^2}\sqrt[3]{-65+38t+t^4}\,dt$，令$g(t)=\sqrt[3]{-65+38t+t^4}$，

則$f'(x)=g(x^2)\times 2x-g(x)$，代入 2，$f'(2)=4g(4)-g(2)$ =28-3=25

6. 前 6 項依序為$a,b,b-a,-a,-b,a-b$,依序循環，$2000=6\times 333+2$，

所以$a+b=2014$，又$2014=6\times 335+4$，$-a+2b=2000$，

$$a=676,\mathrm{b}=1338$$

又 2015=$6\times 335+5$，所以想求 $-a+b$=662

7. 原題 相當於 $a+\Delta b+\Delta c+\Delta d+\Delta e+h=25$，其中$a\geq 1,\Delta b,\Delta c,\Delta d,\Delta e$均$\geq 4$，總數$H_8^6=C_8^{13}=1287$

8. $x^3+3x-2=0$ 在 0 與 1 之間有一個實數解 $x_0$，試解 $x_0$。

【解】:

設$x=\alpha+\beta$

$\because(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)\quad\therefore x^3-3\alpha\beta x-(\alpha^3+\beta^3)=0$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=2\\ \alpha\beta=-1\Rightarrow\alpha^3\beta^3=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha^3$，$\beta^3$為$t^2-2t-1=0$之兩根$1\pm\sqrt{2}$

可設$\begin{cases}\alpha^3=1+\sqrt{2}\\ \beta^3=1-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\\ \beta=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow x=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$

9.若 $P$ 為直角坐標平面上一點，$O$ 為原點，且 $A(2,0)$，$B(0,-2)$，$\overline{OP}=2$，

(1)求 $\overline{PA}^2\times\overline{PB}^2$ 的最大值．

(2)若 $P$ 點落在 $x$ 軸上方，求 $\overline{PA}+3\sqrt{2}\,\overline{PB}$ 的最大值．

【解】:

(1)設 $P(2\cos\theta,2\sin\theta)$

$$\overline{PA}^2=(2\cos\theta-2)^2+(2\sin\theta)^2=4-8\cos\theta+4=8(1-\cos\theta)$$

$$\overline{PB}^2=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+2)^2=4+8\sin\theta+4=8(1+\sin\theta)$$

$$\overline{PA}^2\times\overline{PB}^2=64(1-\cos\theta)(1+\sin\theta)=64(1-\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta\sin\theta)$$

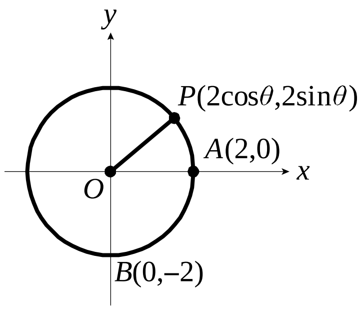
$$=64[1+(\sin\theta-\cos\theta)-\cos\theta\sin\theta]$$

令 $\sin\theta-\cos\theta=t(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$

平方 $\Rightarrow(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{2}$

$$\overline{PA}^2\times\overline{PB}^2=64(1+t-\frac{1-t^2}{2})=32(t+1)^2$$

當 $t=\sqrt{2}$ 時，最大值 $=32(\sqrt{2}+1)^2$ .




(2)設 $P(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$A(2,0)$，$B(0,-2)$

$$\overline{PA}=\sqrt{(2\cos\theta-2)^2+(2\sin\theta)^2}=\sqrt{8(1-\cos\theta)}=\sqrt{8\times2\sin^2\frac{\theta}{2}}=4\sin\frac{\theta}{2}$$

（$\because 0<\theta<\pi\Rightarrow0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\dfrac{\theta}{2}>0$， $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ ）

$$3\sqrt{2}\,\overline{PB}=3\sqrt{2}\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+2)^2}=3\sqrt{2}\sqrt{8(1+\sin\theta)}=3\sqrt{2}\sqrt{8(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2}$$

$$=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}\quad 2\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\therefore\ \overline{PA}+3\sqrt{2}\,\overline{PB}=4\sin\frac{\theta}{2}+12(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})=4(4\sin\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{\theta}{2})$$

$\because 0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}\quad\therefore 4\sin\dfrac{\theta}{2}+3\cos\dfrac{\theta}{2}\le5$

$\therefore\ \overline{PA}+3\sqrt{2}\,\overline{PB}$ 的最大值為 $4\times5=20$ .

10.設 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$，規定 $f_1(x)=f(f(x))$，$f_2(x)=f(f_1(x))$，$f_3(x)=f(f_2(x))$，…，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$n=2$，3，4，…，求 $f_{2015}(104)$ .

【解】:

$$f(x)=1-\frac{1}{x}\ ,\quad f_1(x)=f(f(x))=f(1-\frac{1}{x})=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{x}{x-1}=\frac{-1}{x-1}\ .$$

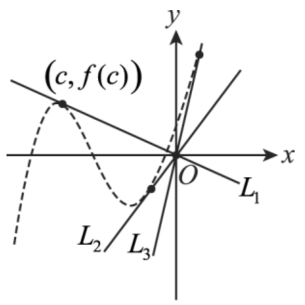
$$f_2(x)=f(f_1(x))=f(\frac{-1}{x-1})=1-\frac{1}{\frac{-1}{x-1}}=1+x-1=x$$

$\Rightarrow f_3(x)=f(x)$，$f_4(x)=f_1(x)$，$f_5(x)=f_2(x)$，…$\therefore f_n(x)$有一週期性

$\Rightarrow f_{3n}(x)=f(x)$，$f_{3n+1}(x)=f_1(x)$，$f_{3n+2}(x)=f_2(x)$，…$\therefore\ f_{2015}(104)=f_2(104)=104$ .

11.三次曲線 $y=x^3+ax^2+x+1$，若由原點可作三條相異的切線，求 $a$ 的範圍為 ________

【解】:




設 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$

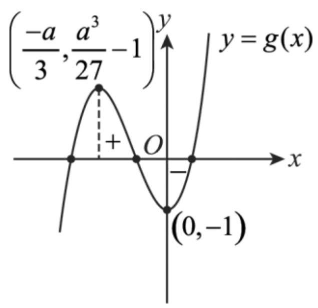
$\Rightarrow\ f'(x)=3x^2+2ax+1$

設切點為$(c,f(c))$

則切線為 $y-f(c)=f'(c)(x-c)$

過$(0,0)\Rightarrow 0-f(c)=f'(c)(0-c)$

$\therefore -(c^3+ac^2+c+1)=(3c^2+2ac+1)(-c)$




$\therefore\ 2c^3+ac^2-1=0$ 有三相異實根

即 $2x^3+ax^2-1=0$ 有三相異實根

設 $g(x)=2x^3+ax^2-1$

$g'(x)=6x^2+2ax=2x(3x+a)$

令 $g'(x)=0$

$\therefore$極點在 $x=0$， $-\frac{a}{3}$

欲三相異實根（與 $x$ 軸有三交點）

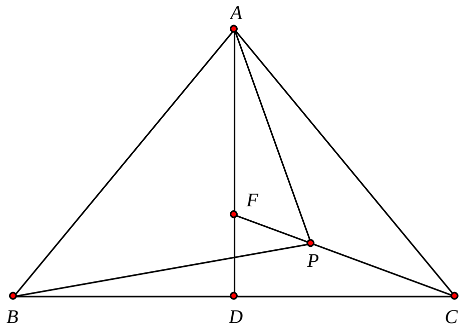
$\therefore g(0)\times g\left(-\frac{a}{3}\right)<0$（異號）

$\therefore (-1)\times\left(-\frac{2a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-1\right)<0$

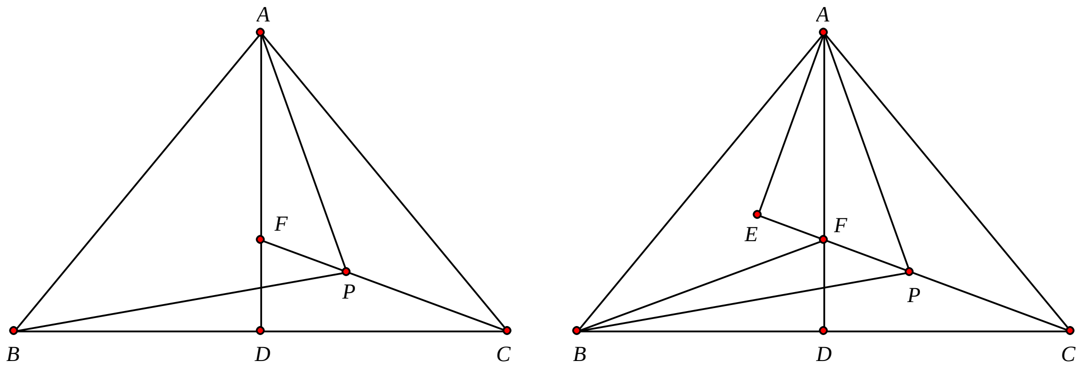
$\therefore \frac{2a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+1<0 \quad \therefore -a^3+27<0 \quad \therefore a^3-27>0 \quad \therefore a^3>27\Rightarrow a>3$ .

12. 設 $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 。若點 $P$ 是 $\triangle ABC$ 的內部一點，且 $\angle ACP=30^\circ$、$\angle PCB=2\angle PBC$ 。

若直線 $CP$ 與中線 $\overline{AD}$ 交於點 $F$，試證： $\overline{AP}$ 是$\triangle CAF$ 的一內角平分線。




**【証明】:**




因為 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 垂直，所以， $\overline{FB}=\overline{FC}$ ， $\angle DCF=\angle DBF$ 。

過 $A$ 作直線 $CP$ 的垂直線，設垂足為 $E$。在直角三角形$\triangle AEF$ 與$\triangle CDF$ 中，因為 $\angle AFE=\angle CFD$，

所以，$\angle EAF=\angle DCF$ 。由此可得 $\angle EAF=\angle DBF$ 。於是，$\triangle AEF$ 與$\triangle BDF$ 相似，

因而得 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$ 。

因為 $\angle FBC=\angle PCB=2\angle PBC$，所以，$\overrightarrow{BP}$ 平分 $\angle CBF$ 。

由此得 $\frac{2\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}$ 。

在直角三角形$\triangle ACE$ 中，因為 $\angle ECA=30^\circ$，所以，$\overline{AC}=2\overline{AE}$ 。

由此得 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}=\frac{2\overline{AE}}{\overline{AF}}=\frac{2\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}$ 。

於是，$\overrightarrow{AP}$ 平分 $\angle FAC$ 。

13.安排 $n$ 個人進入 $A, B, C$ 三間房間，$A$ 房間必須有奇數個人，試問有幾種不同的安排方法？

【解】:

(1) 若 $n$ 為奇數,則進入房間 $A$ 的有可能$1,3,5,\ldots,n$人,其他再安排入 $B,C$ 房，共有

$$C_1^n 2^{n-1}+C_3^n 2^{n-3}+C_5^n 2^{n-5}+\cdots+C_n^n 2^0=2^0C_0^n+2^2C_2^n+\cdots+2^{n-1}C_{n-1}^n$$
$$=\frac{(1+2)^n+(1-2)^n}{2}=\frac{3^n-1}{2}$$

(2) 若 $n$ 為偶數，則進入房間 $A$ 的有可能$1,3,5,\ldots,n-1$人，共有

$$C_1^n 2^{n-1}+C_3^n 2^{n-3}+C_5^n 2^{n-5}+\cdots+C_{n-1}^n 2^1=2^1C_1^n+2^3C_3^n+\cdots+2^{n-1}C_{n-1}^n$$
$$=\frac{(1+2)^n-(1-2)^n}{2}=\frac{3^n-1}{2}$$

因此，不論 $n$ 為奇數或偶數，兩者皆為 $\frac{3^n-1}{2}$ 種不同的安排方法。

14.已知 $x$ 為正實數，

(1)求證：函數 $f(x)=x^{\log 9}+19$ 為嚴格遞增函數。

(2)求方程式$(9^{\log x}+19)^{\log 9}+19=x$ 的解。

【解】:

(1)若 $x_1>x_2>0$,則 $\log x_1>\log x_2\Rightarrow\log 9\cdot\log x_1>\log 9\cdot\log x_2\Rightarrow\log x_1^{\log 9}>\log x_2^{\log 9}\Rightarrow x_1^{\log 9}>x_2^{\log 9}$

$\Rightarrow x_1^{\log 9}+19>x_2^{\log 9}+19\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ $\therefore$函數 $f(x)=x^{\log 9}+19$ 為嚴格遞增函數。

或利用微分法 $f'(x)=\log 9x^{\log 9-1}>0$ $\therefore$函數 $f(x)=x^{\log 9}+19$ 為嚴格遞增函數。

(2)設方程式$(9^{\log x}+19)^{\log 9}+19=x$ 的解為 $\alpha\Rightarrow(9^{\log\alpha}+19)^{\log 9}+19=\alpha\Rightarrow f(f(\alpha))=\alpha$

①若 $f(\alpha)>\alpha$，則 $f(f(\alpha))>f(\alpha)\Rightarrow\alpha>f(\alpha)$，矛盾

②若 $f(\alpha)<\alpha$，則 $f(f(\alpha))<f(\alpha)\Rightarrow\alpha<f(\alpha)$，矛盾

由①、②可得 $f(\alpha)=\alpha\Rightarrow\alpha^{\log 9}+19=\alpha$

令 $\alpha=10^{\beta}$ 則 $10^{\beta\log 9}+19=10^{\beta}\Rightarrow 9^{\beta}+19=10^{\beta}\Rightarrow 10^{\beta}-9^{\beta}=19$

利用勘根定理可得 $\beta=2\Rightarrow\alpha=10^{2}=100$ 為方程式的唯一正實根。