

# 國立東石高中 99 學年度第 1 次教師甄選 數學科試卷

填充題：每題 10 分

1. 令  $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ . 求  $\alpha^4 - 2\alpha^3 + 7\alpha^2 - 13\alpha$ .
2. 求複數  $a$  使得  $2 + 3i$  是二次方程式  $z^2 + az - 2 + 23i = 0$  的一根。
3. 已知向量  $\vec{A}$  和  $\vec{B}$  的夾角是  $135^\circ$ ，且長度分別為 5 與  $3\sqrt{2}$ . 求  $3\vec{A} - 2\vec{B}$  的長度。
4. 令  $x = (\cos \frac{\pi}{6})X - (\sin \frac{\pi}{6})Y$ ,  $y = (\sin \frac{\pi}{6})X + (\cos \frac{\pi}{6})Y$ . 用  $X$  與  $Y$  改寫方程式
$$11x^2 + 4\sqrt{3}xy + 7y^2 - 1 = 0.$$
5. 求實數  $a$  使得球面  $x^2 + y^2 + z^2 - 45 = 0$  與平面  $x - 2y - 2z + a = 0$  剛好相切。
6. 求函數  $\frac{x^2}{1-x}$  在  $x=0$  的級數展開(series expansion)。

計算與證明：每題 10 分（要有計算與證明過程。）

1. 假設數列  $\{a_k\}$  的遞迴定義為  $a_1 = 4$ ,  $a_{k+1} = 3a_k^2 + 4a_k + 3$  其中  $k \geq 1$ . 用數學歸納法，證明  $a_k + 3$  可以被 7 整除。
2. 證明方程式  $x^3 - 4x + 2 = 0$  在  $[-3, 3]$  區間內有三個實根，並找出這些根介於那些相鄰的整數之間。
3. 假設  $a(t), b(t), c(t), d(t)$  為變數  $t$  的函數，求行列式  $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}$  對於  $t$  的導函數。
4. 利用微積分基本定理，計算  $\frac{d}{dt} \int_t^{t^2} e^x dx$ .