國立臺灣師大附中104學年度第一次教師甄試

數學科 試題及答案

一、填充題(每題5分，共60分)

1. 化簡 $\sqrt{9+\sqrt{32}+\sqrt{48}+\sqrt{24}}-\sqrt{6-\sqrt{24}+\sqrt{12}-\sqrt{8}}=$ ________ 。

【答案】$2\sqrt{2}+1$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{9+\sqrt{32}+\sqrt{48}+\sqrt{24}}-\sqrt{6-\sqrt{24}+\sqrt{12}-\sqrt{8}}\\
&=\sqrt{9+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}-\sqrt{6-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\\
&=\sqrt{(5+2\sqrt{6})+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+4}-\sqrt{(5-2\sqrt{6})+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1}\\
&=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+4(\sqrt{2}+\sqrt{3})+4}-\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+1}\\
&=\sqrt{2}+\sqrt{3}+2-(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)\\
&=2\sqrt{2}+1
\end{aligned}$$

2. 將一個二位數碼$(00\sim 99)$平方後，取百位與十位數字形成一個新的二位數碼，稱為操作一次；例如$04\to 01$、$11\to 12$、$50\to 50$，對於得到的新數碼可以繼續操作，例如$11\to 12\to 14\to 19\cdots$。現在取一開始的數碼為$79$，那麼連續操作$2015$次之後所得到的數碼為 ________ 。

【答案】24

$79^2=6241$　$24^2=576$　$57^2=3249$，可見兩個一循環，所以是 24

3. 令 $z=1-\sqrt{3}i$，$\omega=\sqrt{3}+i$，若n為小於100的正整數，且使得 $z\omega^n$ 為一個實數，求所有這樣的n的總和為 ________ 。

【答案】850

$Arg\, z=300^\circ$　$Arg\,\omega=30^\circ$，$arg(z\omega^n)=(300+30n)^\circ$，

只要$300+30n$是 180 的整數倍數即可，故
$n=2,8,14,\cdots,98$，其和為 850

4. 一個五位數，若他的五個數字滿足(1) 萬位數、千位數、百位數為嚴格遞增；以及(2) 百位數、十位數、個位數為嚴格遞減，則稱此五位數為『山形數』，例如 12321、24830。問五位數中，總共有多少個『山形數』？ ________ 。

【答案】2142

$$\begin{aligned}
&C_2^2\times C_2^3+C_2^3\times C_2^4+C_2^4\times C_2^5+C_2^5\times C_2^6+C_2^6\times C_2^7+C_2^7\times C_2^8+C_2^8\times C_2^9\\
&=3+18+60+150+315+588+1008\\
&=2142
\end{aligned}$$

5. 設x為整數，且$11\le x\le 99$，若$\dfrac{1}{x}$的常用對數的尾數比x^2的常用對數的尾數大，則滿足條件的x共有 ________ 個。

【答案】26

因為$0.01<\dfrac{1}{x}<0.1$，所以$\log\dfrac{1}{x}=-2+\alpha$，其中$\alpha$是尾數；

(1)考慮$11\le x\le 31$，$\log x^2=2+\beta$，要求$\alpha>\beta$，即$2+\log\frac{1}{x}>-2+\log x^2$

$\log x<\frac{4}{3}$，得到$x\le 21$，共有 11 個。

(2) 考慮$32\le x\le 99$，$\log x^2=3+\gamma$，要求$\alpha>\gamma$，即$2+\log\frac{1}{x}>-3+\log x^2$

$\log x<\frac{5}{3}$，得到$x\le 46$，共有 15 個。

所以共有 26 個。

6. 線性函數$f(x)=ax+b$，其中a與b均為**整數**，且滿足$6\le f(3)\le 10$，$12\le f(8)\le 20$，則$f(9)$的最大值為 ________________。

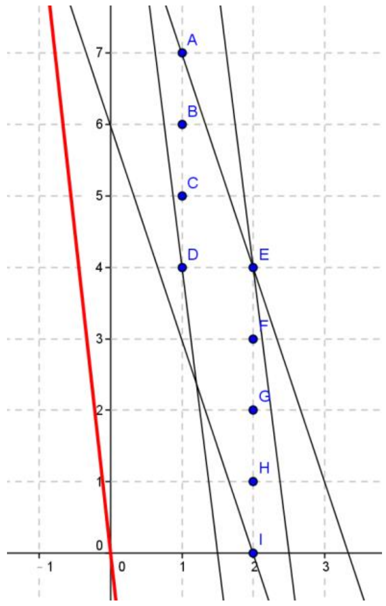
【答案】22

可行解區域為$\begin{cases}6\le 3a+b\le 10\\12\le 8a+b\le 20\end{cases}$其中的格子點，目標函數為$9a+b$，

畫圖，如圖所示，

可以知道在$E(2,4)$點有最大值，

此最大值為 22



7. 如圖所示

甲									乙

甲與乙中間有八個格子，進行時，甲只能向右 1 或 2 或 3 格；乙只能向左 1 或 2 或 3 格。甲乙輪流行動，甲先動，若兩人停在同一格，則遊戲提前結束。問提前結束的情況有 ______________ 種。

【答案】149

令a_n表示兩人中間有 n 格，某人先動而提前結束的方法數，那麼

$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$，且$a_0=1$　$a_1=2$　$a_2=4$，繼續算下去

$a_3=7$　$a_4=13$　$a_5=24$　$a_6=44$　$a_7=81$　$a_8=149$

8. $S=\sum_{k=1}^{59}\frac{1}{\cos k^\circ\cos(60-k)^\circ}$，$T=\sum_{k=1}^{59}\tan k^\circ$；求$\frac{T}{S}=$ ______________ 。

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$T=\sum_{k=1}^{59}\tan k^\circ=\sum_{k=1}^{29}\left(\frac{\sin k^\circ}{\cos k^\circ}+\frac{\sin(60-k)^\circ}{\cos(60-k)^\circ}\right)+\tan 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sum_{k=1}^{29}\frac{\sin k^\circ\cos(60-k)^\circ+\cos k^\circ\sin(60-k)^\circ}{\cos k^\circ\cos(60-k)^\circ}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sum_{k=1}^{29}\frac{\sin 60^\circ}{\cos k^\circ\cos(60-k)^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{\cos 30^\circ\cos(60-30)^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2\sum_{k=1}^{29}\frac{1}{\cos k^\circ\cos(60-k)^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{59}\frac{1}{\cos k^\circ\cos(60-k)^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}S$$

所以$\frac{T}{S}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^6-k(k-1)^5}{n^6}=$ ________________ 。

【答案】$\dfrac{5}{6}$

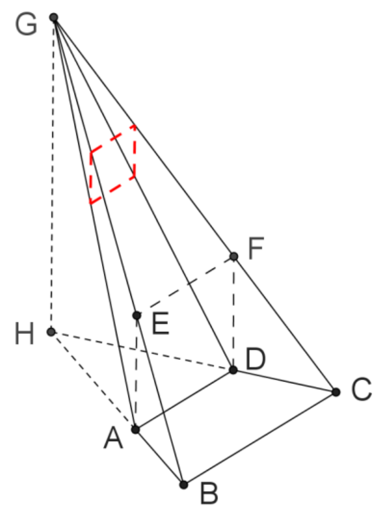
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^6-k(k-1)^5}{n^6}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\times\frac{k^5-(k-1)^5}{n^5}$$

$$=\int_0^1\sqrt[5]{x}\,dx=\frac{5}{6}$$

10. 某別墅有一個正方形的窗戶，窗外路燈的光線(假設路燈是一個點光源)透過窗戶在地板上形成一個四邊形的光影。現在以地板為 xy 平面，建立一個空間直角座標系(已知窗戶所在的牆壁面與地板垂直，而且窗戶的邊框分別與地板平行或是垂直)，發現窗戶光影外框的四個頂點座標分別是 $(6,10,0),(8,14,0),(-4,23,0),(-2,16,0)$ ，則路燈點光源的座標是 ________________ 。

【答案】$(2,2,30)$

令 $A(6,10,0),B(8,14,0),C(-4,23,0),D(-2,16,0)$ ，可以發現 AD 和 BC 是平行的，所以這是窗戶的上下兩邊；且知 $AD=10,BC=15$ ，把窗戶平行地移動到地板上，下緣與 AD 重合，那麼上緣的坐標就是 $E(6,10,10),F(-2,16,10)$ 。於是直線 $BE:\dfrac{x-6}{-2}=\dfrac{y-10}{-4}=\dfrac{z-10}{10}$ 、直線 $CF:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-16}{-7}=\dfrac{z-10}{10}$ ，兩線交點就是光源位置，解得為 $(2,2,30)$ 。



[法二]

也可以這樣，發現 AD 和 BC 是平行，先在 xy 平面上解出 AB 和 CD 的交點為 $(2,2,0)$，這個點就是光源在 xy 平面上的投影點，令為 H，那麼由圖可知 $\dfrac{HA}{HB}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{2}{3}$ ，得到 $\dfrac{AE}{HG}=\dfrac{AB}{BH}=\dfrac{1}{3}$ ，故 $HG=30$

11. 有六張牌，其正面分別是紅、黃、藍三種顏色，每種顏色各兩張；而背面是完全相同的圖案。現在將所有牌張隨機依序放好，背面朝上，進行翻牌配對遊戲，規則如下：
一次翻開兩張，但是一張一張翻開；
若第二張與第一張顏色相同，則兩張都取走；若不同，則蓋回背面放在原來的位置；
繼續進行到所有牌都拿完，稱為一局結束。
現在假定翻過而沒有拿走的牌張，能夠完全記住位置，並且接下來會去選擇未翻過的牌張；當再翻到此種顏色時，會先去把此種顏色翻開而取走。
問一局結束所需要的翻牌張數的期望值為 ______________ 張。

【答案】$\dfrac{26}{3}$

先算四張情況，分兩種狀況：

第一種，四張皆未知， $E_1=4\times\dfrac{1}{3}+6\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{3}$ ；

第二種，有一張已知， $E_2=4\times(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2})+6\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{14}{3}$ ；

第三種，有兩張已知，顯然 $E_3=4$ 。

再看六張的情形，分成 AA，ABA(B)，ABCC，ABCA(B)四種狀況

$$\frac{1}{5}\times(2+E_1)+\frac{4}{5}\times\frac{2}{4}\times(4+E_2)+\frac{4}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times(4+E_3)+\frac{4}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times(4+6)=\frac{26}{3}$$

12. 在會議室圓桌上有 8 個座位，順時針依序放有 1, 2, 3,…, 8，共 8 張名牌。我們將參與這場會議的人也編號，依序為 1, 2, 3,…, 8，其中 1 一定會先抵達並坐編號 3 的位置，其他人則依亂序到來，先找到自己的座位，如果位置是空的就坐下，如果被占了就往順時針方向的下一個空位坐下。等到一個人坐定後，另一個人再進入會議室。最後共有＿＿＿＿＿＿種不同的坐法。

【答案】32

2 號進來時，必然可以坐在 2 號的位置；

3 號進來，必然坐在從 3 號順時針方向後的第一個空位；

其他人進來不是坐在自己的位置，就是坐在順時針方向後的第一個空位；

所以最多有 $2^5=32$ 種坐法。

對於每一種選取座位的方式，那些坐在自己位置上的，就讓他們先進來(順序不拘)；

不是坐在自己位置上的，就接著剛剛那些人由小到大進來，這樣我們知道每一種坐法都至少有一種進來的順序可以得到，故坐法數就是最多的結果。

二、計算證明題(每題 10 分，共 40 分)

1. 在 ΔABC 中，$\overline{BC}=a$ 、$\overline{AC}=b$ 、$\overline{AB}=c$ ，$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ ，證明：

(1) $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ (2) $\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos^2\dfrac{A}{2} \\ b & b^2 & \cos^2\dfrac{B}{2} \\ c & c^2 & \cos^2\dfrac{C}{2} \end{vmatrix}=0$ 。(每小題 5 分)

【證明】

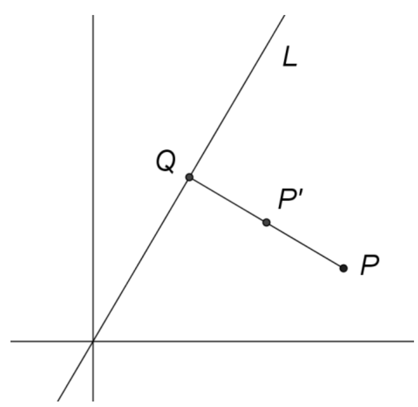
(1) $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\dfrac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$

$=\sqrt{\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}=\sqrt{\dfrac{2s\times 2(s-a)}{4bc}}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$

(2) 同理 $\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}}$ 、$\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

$$原式=\begin{vmatrix} a & a^2 & \dfrac{s(s-a)}{bc} \\ b & b^2 & \dfrac{s(s-b)}{ac} \\ c & c^2 & \dfrac{s(s-c)}{ab} \end{vmatrix}=\frac{s}{abc}\begin{vmatrix} a & a^2 & a(s-a) \\ b & b^2 & b(s-b) \\ c & c^2 & c(s-c) \end{vmatrix}=s\begin{vmatrix} 1 & a & s-a \\ 1 & b & s-b \\ 1 & c & s-c \end{vmatrix}=s\begin{vmatrix} 1 & a & s \\ 1 & b & s \\ 1 & c & s \end{vmatrix}=0$$

2. 在 xy 平面上，直線 L 的方程式為 $y=\sqrt{3}x$，二階方陣 A 所對應的線性變換 $P'=AP$ ，是將點 P 到 L 的垂直距離縮小一半得到 P' 點，如圖所示，Q 是 P 在 L 上的投影點，P' 就是 $\overline{PQ}$ 的中點。



(1) 求 A

(2) 若$\Gamma:(x-4)^2+y^2=4$在經過 A 的變換後變成Γ'，求Γ'的方程式。(每小題 5 分)

(1) $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8}\\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8}\end{pmatrix}$ (2)$13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2-56x+8\sqrt{3}y+48=0$

(1)

L 的法向量為$(\sqrt{3},-1)$，令 O 為原點，那麼$\overline{PQ}$就是$\overline{PO}$在$(\sqrt{3},-1)$上的正射影，

$$\overline{PQ}=\frac{(-x,-y)\bullet(\sqrt{3},-1)}{4}(\sqrt{3},-1)=(\frac{-3x+\sqrt{3}y}{4},\frac{\sqrt{3}x-y}{4})$$

所以P'的坐標為$\frac{1}{2}(\frac{-3x+\sqrt{3}y}{4},\frac{\sqrt{3}x-y}{4})+(x,y)=(\frac{5x+\sqrt{3}y}{8},\frac{\sqrt{3}x+7y}{8})$，

因此$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8}\\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8}\end{pmatrix}$

(2) 令P'的坐標為(u,v)，那麼

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，以 $x=\frac{7}{4}u-\frac{\sqrt{3}}{4}v$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{4}u+\frac{5}{4}v$代入得到

$13u^2-6\sqrt{3}uv+7v^2-56u+8\sqrt{3}v+48=0$

故為$13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2-56x+8\sqrt{3}y+48=0$

3. 若$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$為 n 個相異實數，試證：$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)^{-1}=0$。

【證明】

令$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{j\neq i}(x-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$，那麼$\deg f\leq n-1$，

但是$f(a_i)=1\quad\forall i=1,2,3,\cdots,n$，所以$f(x)\equiv 1$，

考慮x^{n-1}項的係數即得到$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)^{-1}=0$

4. 一個正二十面體的中心為 O，相鄰兩個頂點 A 與 B，令$\angle AOB=\alpha$；再令正十二面體相鄰兩面的兩面角為β，求$\alpha+\beta$。

【解答】180°或π

取正十二面體相鄰的兩面，PQ 為共用的稜邊，K 為 PQ 中點；
M、N 分別是兩面的中心，那麼$\angle MKN=\beta$；
令 O 為正十二面體的中心，因為正十二面體各面的中心，會構成正二十面體，且有相同的中心，所以$\angle MON=\alpha$；
M、N、K、O 到 P 跟 Q 的距離都相等，所以這四點共面；
又$OM\perp MK$，且$ON\perp NK$，故$\alpha+\beta=180^\circ$。