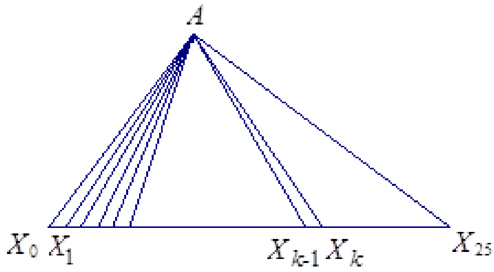
1	已知 $x^3+6x^2+px-q=0$ 之三根成等差數列，且 x^3+qx^2-px+1 之三實根成等比數列，則數對 $(p,q)=$ ？ 【解答】$(16,-16)$ 【詳解】$x^3+6x^2+px-q=0$的三根和為-6，可設等差數列三根$-2-d,-2,-2+d$，利用根與係數關係可知 $p=12-d^2$，$q=2d^2-8$，消去 d 可得$2p+q=16$。 x^3+qx^2-px+1的三根積為-1，可設等比數列三根$-\frac{1}{r},-1,-r$，利用根與係數關係可知$-q=-(r+1+\frac{1}{r})$，$-p=r+1+\frac{1}{r}$，可得 $p=-q$。 解聯立$\begin{cases}2p+q=16\\p=-q\end{cases}$可得$(p,q)=(16,-16)$	104北一女中			A0043
1	設 $f(x)$ 為實係數多項函數且 $f(x)=x^3\int_1^2 f(x)dx-21x^2+2x\int_1^2 f(x)dx-20$，則 $f(1)$ 的值為？ 【解答】-5 【詳解】令$\int_1^2 f(x)dx=k$，則 $f(x)=kx^3-21x^2+2kx-20$， 積分$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(kx^3-21x^2+2kx-20)dx=\left.\frac{kx^4}{4}-7x^3+kx^2-20x\right\|_1^2=\frac{27k}{4}-69$， 解$k=\frac{27}{4}k-69$，得$k=12$。	104北一女中			A0044

題號	題目	出處			代碼
1	見下	104 北一女中			A0045

1

如圖，三角形 AX_0X_{25}，已知 $\overline{AX_0}=3$，$\overline{AX_{25}}=4$，$\overline{X_0X_{25}}=5$，且點 $X_1,X_2,\dots,X_{24}$ 依序將斜邊分成 25 等分，試求

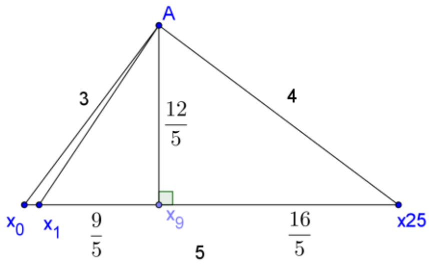
$\sum_{k=1}^{25}\overline{AX_{k-1}}\cdot\overline{AX_k}=$？



【解答】208

【詳解】利用餘弦定理，可知 $(\frac{1}{5})^2=|\overline{AX_{k-1}}|^2+|\overline{AX_k}|^2-2\overline{AX_{k-1}}\cdot\overline{AX_k}$，所求

$$\sum_{k=1}^{25}\overline{AX_{k-1}}\cdot\overline{AX_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{25}\left[|\overline{AX_{k-1}}|^2+|\overline{AX_k}|^2-(\frac{1}{5})^2\right]=12+\sum_{k=1}^{24}|\overline{AX_k}|^2$$



做三角形斜邊上的高，$h=\frac{12}{5}$，垂足恰好為 X_9

因此，以 $\overline{AX_9}$ 為股向兩邊做直角三角形，可求得 $\overline{AX_k}$。

$$\sum_{k=1}^{24}|\overline{AX_k}|^2=\left[(\frac{8}{5})^2+h^2\right]+\left[(\frac{7}{5})^2+h^2\right]+\dots+\left[(\frac{1}{5})^2+h^2\right]+h^2+\left[(\frac{1}{5})^2+h^2\right]+\dots+\left[(\frac{15}{5})^2+h^2\right]$$

$$=24\times(\frac{12}{5})^2+\frac{1}{25}\left[\frac{8\cdot9\cdot17}{6}+\frac{15\cdot16\cdot31}{6}\right]=196$$

所求 $=196+12=208$

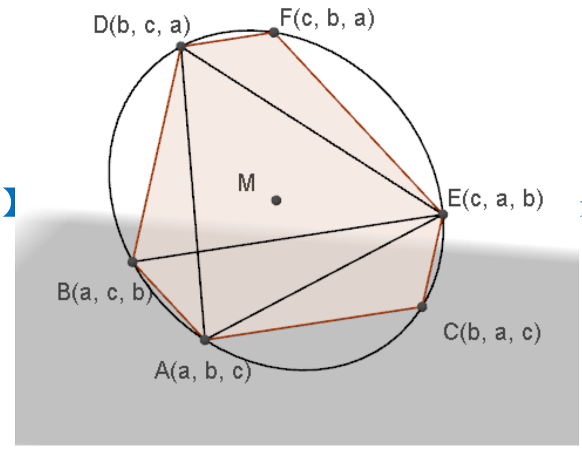
題號	題目與詳解	出處			編號
1	見下	104 北一女中			A0046

1

已知空間中有六個點，坐標分別為(a,b,c)、(a,c,b)、(b,a,c)、(b,c,a)、(c,a,b)、(c,b,a)，若$a,b,c\in R$ 且$a>b>c>0, a-c=103$。則此六個點所決定的凸六邊形之周長為？

【解答】$309\sqrt{2}$

【詳解】



先求此六邊形的中心點 M 的座標。

設六邊形所在的平面之法向量為$\overrightarrow{n_E}$，$\overrightarrow{n_E}$與任兩點的方向向量垂直，如$(0,b-c,c-b)=(b-c)\cdot(0,1,-1)$，同理可再取另一向量$(1,-1,0)$，求得$\overrightarrow{n_E}=(1,1,1)$，平面為$x+y+z=a+b+c$，M 點坐標即為$M(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3})$

，因此可知$\overline{MA}=\overline{MB}=...=\overline{MF}=R$，外接圓半徑

$$R=\frac{1}{3}\sqrt{(b+c-2a)^2+(a+c-2b)^2+(a+b-2c)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$ 。

六邊形任兩點之間距離有四種：$\sqrt{2}(a-c),\sqrt{2}(b-c),\sqrt{2}(a-b)$，以及

$\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=\sqrt{3}R$。

以$(a,b,c),(b,c,a),(c,a,b)$為三頂點可連成一邊長為$\sqrt{3}R$ 的正三角形，再與剩餘三點之一可連成一圓內接四邊形。

由於$a>b>c$，可知$\sqrt{2}(a-c)>\sqrt{2}(b-c),\sqrt{2}(a-c)>\sqrt{2}(a-b)$，所以此圓內接四邊形有兩邊是$\sqrt{3}R$，有兩邊是$\sqrt{2}(b-c),\sqrt{2}(a-b)$，對角線為$\sqrt{3}R$與$\sqrt{2}(a-c)$。

套用托勒密定理，可知$\sqrt{2}(b-c)\times\sqrt{3}R+\sqrt{2}(a-b)\times\sqrt{3}R=\sqrt{2}(a-c)\times\sqrt{3}R$。

$\sqrt{2}(b-c)+\sqrt{2}(a-b)=\sqrt{2}(a-c)$ ，所求六邊形邊長即為

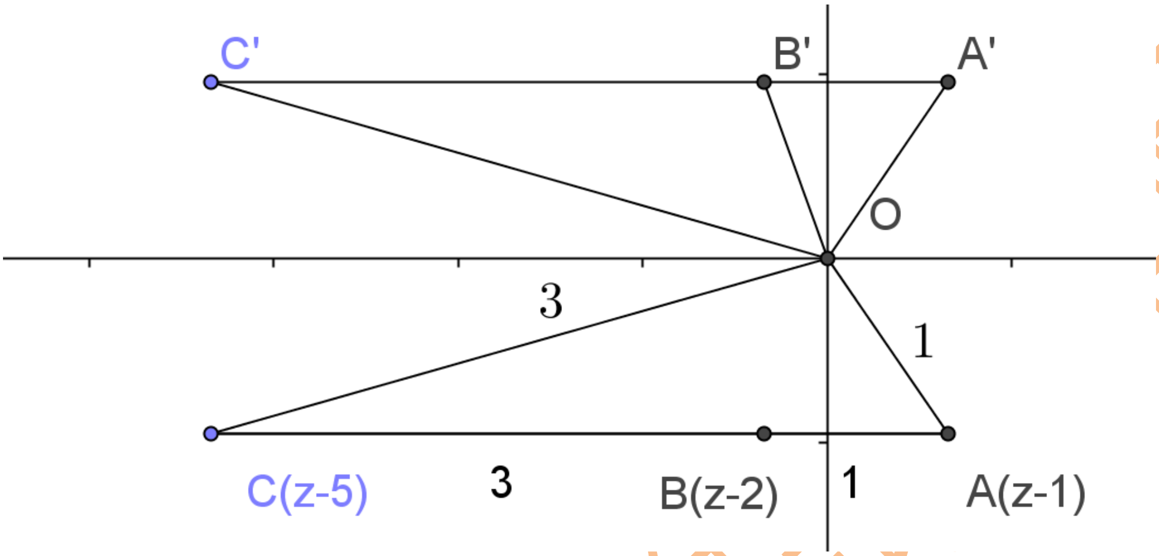
$3\left[\sqrt{2}(b-c)+\sqrt{2}(a-b)\right]=3\times\sqrt{2}(a-c)=309\sqrt{2}$。

【備註】R 的值好像沒算出來也無所謂，填充題就直接從托勒密開始吧！

1	設 z,w 為複數，若 $\dfrac{z-5}{z-1}=3(\cos\dfrac{23}{18}\pi+i\sin\dfrac{23}{18}\pi)$ 且 $\dfrac{w(z-2)}{z-5}=\pi$，則複數 w 之主幅角為？	104 北一女中			A0047

【解答】$295^\circ=\dfrac{59}{36}\pi$

【詳解】設 $z-1,z-2,z-5$ 在複數平面上代表的點分別為 A、B、C，原點為 O。



如圖若 $z=a+bi$ ，不失一般性可設 $b>0$ ，則 A、B、C 會在 $z=bi$ 或 $z=-bi$ 上。

因 $Arg(z-5)-Arg(z-1)=\dfrac{23}{18}\pi$ ，若在 $z=bi$ 上， $Arg(z-5)-Arg(z-1)<\pi$ ，不合。

因此 A、B、C 落在 $z=-bi$ 上 $Arg(z-5)-Arg(z-1)=\dfrac{23}{18}\pi=-\dfrac{13\pi}{18}+2\pi$ ，所以

$\angle AOC=\dfrac{13\pi}{18}$ ， $Arg(z-1)>Arg(z-2)>Arg(z-5)$ 。

由 $\left|\dfrac{z-5}{z-1}\right|=3$ 可知 $\overline{OC}:\overline{OA}=3:1=\overline{CB}:\overline{BA}$ ，所以 $\overline{OB}$ 為 $\angle AOC$ 的平分線。

$\dfrac{w(z-2)}{z-5}=\pi=\pi(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$ ，所以

$Arg(w)+Arg(z-2)-Arg(z-5)=Arg(\pi)=0^\circ$ ，將 $Arg(z-2)-Arg(z-5)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{13\pi}{18}$ 代入，可知 $Arg(w)+\dfrac{13\pi}{36}=2\pi$ ， $Arg(w)=\dfrac{59\pi}{36}$ 。

1	已知集合 $S=\{n\mid n\in N,n\le 104\}$。將 S 的**所有子集**一一寫在不同的紙上，然後將所有寫上子集的紙通通放入箱子中。若每次抽取時每張紙被取中的機會均等，今自箱子中抽取一張紙，紙上的集合為 A，然後將這張紙放回箱子中，再抽取一張，紙上的集合為 B，將 $A\subset B$ 且 $A\ne B$ 的事件記為 C，則機率 $P(C)=$ ？ 【解答】$\dfrac{3^{104}-2^{104}}{4^{104}}$ 【詳解】對每個元素來說，可能出現的狀況有四種：集合 A 跟 B 都有此元素、只有 A 有此元素、只有 B 有此元素、AB 都沒有此元素，所以總共的事件 $n(S)=4^{104}$。 $A\subset B$ 代表可以是 A 跟 B 都有此元素、只有 B 有此元素、或者 AB 都沒有此元素。 $n(A\subset B)=3^{104}$。 $A=B$ 為 A 跟 B 都有此元素、或者 AB 都沒有此元素的選擇，$n(A=B)=2^{104}$。 所求 $=\dfrac{n(A\subset B\cap A\ne B)}{n(S)}=\dfrac{n(A\subset B)-n(A=B)}{n(S)}=\dfrac{3^{104}-2^{104}}{4^{104}}$。 【另解】設 B 中有 K 個元素，則 A 只有可能從這 K 個選擇，而且不能全選，有 2^k-1 種選法，直接計算 $\sum_{k=0}^{104}\dfrac{C_k^{104}}{2^{104}}\cdot\dfrac{2^k-1}{2^{104}}$。 $\sum_{k=0}^{104}\dfrac{C_k^{104}}{2^{104}}\cdot\dfrac{2^k-1}{2^{104}}=\dfrac{1}{4^{104}}\sum_{k=0}^{104}C_k^{104}\cdot(2^k-1)=\dfrac{1}{4^{104}}\left[\sum_{k=0}^{104}C_k^{104}\cdot 2^k-\sum_{k=0}^{104}C_k^{104}\right]=\dfrac{3^{104}-2^{104}}{4^{104}}$	104 北 一 女 中				A 0 0 4 8