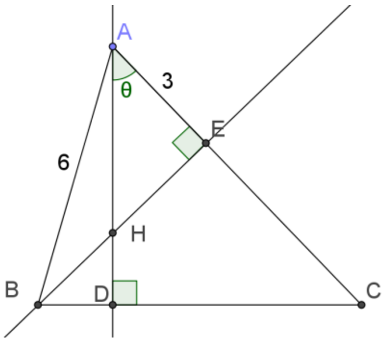
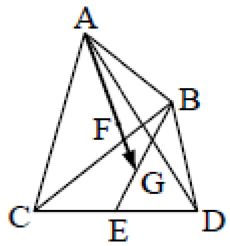
1	求$16\cos^4 40°+24\cos^3 40°-12\cos^2 40°-16\cos 40°+5$ 之值=？ 【解答】2 【詳解】$\cos 120°=4\cos^3 40°-3\cos 40°=-\frac{1}{2}$代入 原式$=4\cos 40°(4\cos^3 40°-3\cos 40°)+6(4\cos^3 40°-3\cos 40°)+2\cos 40°+5$ $=-2\cos 40°-3+2\cos 40°+5=2$	104 台中一中			A0001
1	三正整數 a、b、c 分別為 32 位數、31 位數、30 位數，且 a＋b、b＋c 分別為 33 位數、32 位數，則$\log ab$ 的首數為？ 【解答】62 【詳解】設$a=A\times 10^{31}$，$b=B\times 10^{30}$，$c=C\times 10^{29}$，$1\le A,B,C<10$。 $a+b=A\times 10^{31}+B\times 10^{30}=(A+\frac{B}{10})\times 10^{31}$，因為會進位，所以可知$A+\frac{B}{10}\ge 10$，但因假設可知$\frac{B}{10}<1$，所以$A>9$，同理可知$B>9$，$81<AB<100$，所以 $62<\log ab=\log AB\times 10^{61}<63$，首數為 62。	104 台中一中			A0002

1	在銳角ΔABC中，$\angle A=60^\circ$，$\overline{AB}=6,\overline{AC}=8$。若 H 為$\Delta ABC$的垂心，則$\overline{AH}=$？ 【解答】$\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$ 【詳解】如圖，設三高的垂足分別為 D、E、F，先算出ΔABC面積為$12\sqrt{3}$，由面積可以推算出三高$\overline{AD}=\dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{12\sqrt{39}}{13}$，以及用畢氏定理求出$\overline{AE}=3$。  如圖所示，設$\angle HAE=\theta$，利用 $\cos\theta=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AH}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\Rightarrow\dfrac{3}{\overline{AH}}=\dfrac{\frac{12\sqrt{39}}{13}}{8}$，可求出$\overline{AH}=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$	104 台 中 一 中			A 0 0 0 3

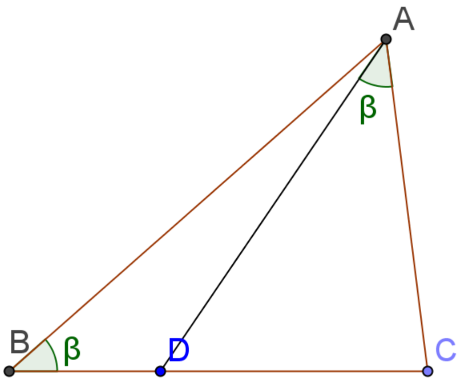
1	已知 ΔABC 的三個頂點均在拋物線 $\Gamma: y^2=4cx(c>0)$ 上，且 ΔABC 的重心恰為拋物線的焦點 $F(c,0)$。若邊 $\overline{BC}$ 所在的直線方程式為 $4x+y-20=0$，則 c 之值為？ 【解答】4 【詳解】令三頂點為 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，則由重心性質有 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=c$，$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0$。 由於 $y^2=4cx$ 與 $4x+y-20=0$ 有兩相異交點 B、C，因此解聯立 $\begin{cases} y^2=4cx \\ 4x+y-20=0 \end{cases}$， $\frac{y^2}{c}+y-20=0 \Rightarrow y^2+cy-20c=0$，此方程式有兩相異根 y_2,y_3，由根與係數可知 $y_2+y_3=-c$，又 B、C 滿足直線方程式，因此有 $4x+y-20=0 \Rightarrow x_2=\frac{20-y_2}{4}, x_3=\frac{20-y_3}{4}$，可推得 $x_2+x_3=\frac{20-y_2}{4}+\frac{20-y_3}{4}=10-\frac{(y_2+y_3)}{4}=10+\frac{c}{4}$。 將上述式子代入重心的性質可知 $y_1=\frac{c}{3}$，$x_1=3c-(x_2+x_3)=3c-(10+\frac{c}{4})=\frac{11c}{4}-10$ 又因 $y_1^2=4cx_1$，可知 $c^2=4c(\frac{11c}{4}-10) \Rightarrow 10c(c-4)=0$，所以 $c=4$。	104 台 中 一 中			A 0 0 0 4

1	在三位數中 $\overline{abc}$ 中，若滿足 $a\le b\le c$ ，則稱此三位數為「奮發數」(如：234、335、666)；若滿足 $a\ge b\ge c$ ，則稱此三位數為「墮落數」(如：432、553、666)。若三位數既不是奮發數也不是墮落數(如：243、353)，則稱為「搖擺數」。 求在所有三位數中，有幾個「搖擺數」。？ 【解答】525 【詳解】考慮 abc 三數的異同，討論為搖擺數的情形。 (1)三數相同：可稱為奮發數也可稱為墮落數，故不合 (2)三數中兩同一異：搖擺數必為 $a=c\ne b$ 的形式，a 有 9 種選擇，b 有 $10-1$ 種選擇，所以有 81 種。 (3)三數皆不同：(A)考慮三數都不是 0 的情況，有 $C_3^9\times(3!-2)$ 種 (例如為 123、132、213、231、312、321，六種排列中有四種為搖擺數。) (B)考慮有 0 的情況， 若 0 在個位數，則有 $C_2^9\times(2!-1)$ 種(例如為 120、210，兩種排列中有一種為搖擺數。) 若 0 在十位數，則有種 $C_2^9\times(2!)$ 種(例如為 102、201，兩種排列皆為搖擺數。) 所求共有 $81+336+36+72=525$ 種。	104 台 中 一 中				A 0 0 0 5
1	如右圖，四面體 ABCD，E 在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{CE}:\overline{ED}=2:3$ ，G 在 $\overline{BE}$ 上，F 在 $\overline{AG}$ 上滿足 $k\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$ ，$\overrightarrow{BG}=r\overrightarrow{BE}$，$r=$？  【解答】$\frac{5}{8}$ 【詳解】$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+(1-x)\overrightarrow{AB}=x(\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD})+(1-x)\overrightarrow{AB}$，因 F 在 $\overline{AG}$ 上，所以比例相同 $\frac{k\overline{AF}}{\overline{AG}}=\frac{3}{\frac{3}{5}x}=\frac{3}{1-x}=\frac{2}{\frac{2}{5}x}$ ，可解得 $x=\frac{5}{8}$ 。 代入 $\overrightarrow{AG}$ ，$\overrightarrow{AG}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AE}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ ，得知 $\overline{BG}:\overline{GE}=5:3\Rightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BE}$ 。	104 台 中 一 中				A 0 0 0 6

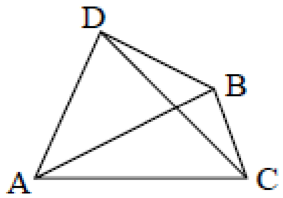
1	已知 $a>0$，點 A，點 $B(2,5,1)$，點 $C(5,-3,-2)$，若點 $P(a,b,c)$ 到平面 ABC 的投影點為 $Q(3,-1,0)$，且點 P 到平面 ABC 的距離為 $7\sqrt{2}$ ，則數對 $(a,b,c)=$ ？ 【解答】$(10,-1,7)$ 【詳解】由題意可知 Q 也在平面 ABC 上，且 $\overline{PQ}\perp E_{ABC}$ ，所以以 $\overline{BQ}\times\overline{CQ}$ 為平面 ABC 的法向量， $\overline{BQ}\times\overline{CQ}=(-10,0,-10)$ ，取法向量 $(1,0,1)$ ，可算得平面 ABC 方程式為 $x+z=3$ 。 由 $\overline{PQ}//\overline{n_{E_{ABC}}}$ ， $\dfrac{1}{3-a}=\dfrac{0}{-1-b}=\dfrac{1}{-c}$ 可知 $b=-1, c=a-3$ ；由距離為 $\dfrac{\lvert a+c-3\rvert}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$ ， 將 $c=a-3$ 代入可知 $\lvert 2a-6\rvert=14$ ，因 $a>0$ ，所以解得 $a=10$ ， $c=7$ 。	104 台 中 一 中				A 0 0 0 7
1	設直線 L 與三次函數 $y=x^3+x+1$ 的圖形有三個不同的交點 A、B、C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{5}$ ，求直線 L 的方程式為？ 【解答】 $y=2x+1$ 【詳解】三次方程式對稱於反曲點，由 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{5}$ 可推知 B 為其反曲點 $(0,1)$ 。 因此設直線方程式 $L:y-1=kx$ ，解 $x^3+x+1=kx+1$ ，整理為 $x(x^2-k)=0$ ，可知 L 與三次函數交於 $(0,1),(\sqrt{k},k\sqrt{k}+\sqrt{k}+1),(-\sqrt{k},-k\sqrt{k}-\sqrt{k}+1)$ ，利用距離 $=\sqrt{5}$ ，可得到 $5=(\sqrt{k})^2+(k\sqrt{k}+\sqrt{k})^2\Rightarrow k^3+2k^2+2k-5=0$ ， $(k-1)(k^2+3k+5)=0$ ， 因此 $k=1$ ，三交點為 $(0,1),(1,3),(-1,-1)$ ，可知直線 L 方程式為 $y=2x+1$ 。 【備註】不能因為假設 $L:y-1=kx$ ，就直接寫答案 $y-1$	104 台 中 一 中				A 0 0 0 8

<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>在 ΔABC 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊分別為 a,b,c。若 $a=5,b=4$，且 $\cos(A-B)=\frac{31}{32}$，則 ΔABC 的面積為？

【解答】$\frac{15\sqrt{7}}{4}$

【詳解】如圖，因 $a>b$，所以可以在 $\overline{BC}$ 上找一點 D，使得 $\angle CAD=\angle B$，因此有 $\Delta ABC\sim\Delta DAC$，可知 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{5}{4}=\frac{4}{\overline{CD}}$。
所以 $\overline{CD}=\frac{16}{5},\overline{BD}=5-\frac{16}{5}=\frac{9}{5}$，並令 $\overline{AB}=5t,\overline{AD}=4t$，計算
$\cos\angle BAD=\cos(A-B)=\frac{31}{32}=\frac{(5t)^2+(4t)^2-(\frac{9}{5})^2}{2\times 5t\times 4t}$，可解出 $t=\frac{6}{5}$，$\overline{AB}=5t=6$。
此三角形為邊長 4、5、6 的三角形，面積代海龍為 $\frac{15\sqrt{7}}{4}$</td>
<td>104
台
中
一
中</td>
<td></td>
<td></td>
<td>A
0
0
0
9</td>
</tr>
</table>

1	設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，求 $\prod\limits_{0\le k<j\le 4}(\omega^k-\omega^j)^2=$？(其中 $\prod\limits_{0\le k<j\le 4}$ 為連乘符號，例如： $\prod\limits_{0\le k<j\le 2}(a_k-a_j)^2=(a_0-a_1)^2(a_0-a_2)^2(a_1-a_2)^2$) 【解答】3125 【詳解】$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)$，所以 $(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)=(x^4+x^3+x^2+x+1)$，因此 $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=(1^4+1^3+1^2+1+1)=5$，所求 $=\left[(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(\omega-\omega^2)(\omega-\omega^3)(\omega-\omega^4)(\omega^2-\omega^3)(\omega^2-\omega^4)(\omega^3-\omega^4)\right]^2$ $=\omega^{20}(1-\omega)^8(1-\omega^2)^6(1-\omega^3)^4(1-\omega^4)^2=(1-\omega)^8(1-\omega^2)^6(1-\omega^3)^4(1-\omega^4)^2$ 利用 $1-\omega=\omega^5-\omega=-\omega(1-\omega^4)$，$1-\omega^2=\omega^5-\omega^2=-\omega^2(1-\omega^3)$，代入前式，可得 $(1-\omega)^8(1-\omega^2)^6(1-\omega^3)^4(1-\omega^4)^2=(-1)^4\left[(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)\right]^5=5^5=3125$	104 台 中 一 中			A 0 0 1 0
1	已知 a、b、c、d、e 均為實數，$i=\sqrt{-1}$，$f(x)=ix^{10}+7x^9-5x^8+ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3-5$，若 $f(i+1)=4-8i$，則 $f(-i+1)=$？ 【解答】$68+8i$ 【詳解】令 $g(x)=7x^9-5x^8+ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3-5$，則 $f(i+1)=4-8i=i(i+1)^{10}+g(i+1)\Rightarrow g(i+1)=4-8i-i(i+1)^{10}$，同理 $f(-i+1)=i(-i+1)^{10}+g(-i+1)\Rightarrow g(-i+1)=f(-i+1)-i(-i+1)^{10}$。 因為 $g(x)$ 為實係數方程式，因此 $g(i+1)=\overline{g(-i+1)}$，可知 $\overline{4-8i-i(i+1)^{10}}=f(-i+1)-i(-i+1)^{10}$，可解出 $f(-i+1)=\overline{4-8i-i(i+1)^{10}}+i(-i+1)^{10}=4+8i-32\cdot i^6-32\cdot i^6=68+8i$	104 台 中 一 中			A 0 0 1 1

1	設連乘積 $\prod_{k=1}^{19}(x+k)=(x+1)(x+2)(x+3)...(x+18)(x+19)=\sum_{k=0}^{19}a_kx^k$，求 $a_{16}=$？ 【解答】920550 【詳解】 $a_{16}=\sum_{1\le i<j<k}^{k=19} i\times j\times k=\dfrac{(\sum_{i=1}^{19}i)(\sum_{j=1}^{19}i)(\sum_{k=1}^{19}k)-C_1^3\times(\sum_{i=j=1}^{19}ij)(\sum_{k=1}^{19}k)+(C_1^3-1)\sum_{i=j=k=1}^{19}ijk}{3!}$ $=\dfrac{190^3-3\times\frac{19\times20\times39}{6}\times190+2\times(190)^2}{6}=920550$	104台中一中			A0012
1	如右圖，四面體 $\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=26$，$\overline{BC}=10\sqrt{3}$， $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{2}$，$\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，則 $\lvert\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})\rvert=$？  【解答】$450\sqrt{39}+1950\sqrt{3}$ 【詳解】$\lvert\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})\rvert$ 可視為 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ 三向量所張的平行六面體體積，為四面體 ABCD 體積的六倍。 作過 D 點垂直 ΔABC 的直線，交 ΔABC 於 O，則 $h^2=\overline{DO}^2=\overline{DA}^2-\overline{OA}^2=\overline{DB}^2-\overline{OB}^2=\overline{DC}^2-\overline{OC}^2$，可知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=R$ 為 ΔABC 外接圓半徑，利用正弦定理 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}=\dfrac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$，可知 $R=10$，$h=\sqrt{26^2-10^2}=24$。 過 C 點作一直線垂直 $\overline{AB}$，且交 $\overline{AB}$ 於 E，利用題目條件可求出 $\overline{BE}=\dfrac{15}{2}$， $\overline{CE}=\dfrac{5\sqrt{13}}{2}$，$\overline{AE}=\dfrac{5\sqrt{39}}{2}$，所以底面 ΔABC 的面積為 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{13}}{2}(\dfrac{15}{2}+\dfrac{5\sqrt{39}}{2})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{75\sqrt{13}+325\sqrt{3}}{4}$，所求體積 $=24(\dfrac{75\sqrt{13}+325\sqrt{3}}{4})=450\sqrt{39}+1950\sqrt{3}$。	104台中一中			A0013

1	函數 $f(x)=\begin{cases} x^2, x<\frac{25}{2} \\ [\frac{x}{3}], x\ge\frac{25}{2} \end{cases}$，其中$[\frac{x}{3}]$ 表示不大於$\frac{x}{3}$的最大整數，若$\sum_{k=1}^{n} f(k)=6240$，則 n 之值為？ 【解答】184 【詳解】$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{12}k^2+4+4+(5+5+5)+(6+6+6)+...$，先求前 14 項的和為 $\frac{12\times13\times25}{6}+8=658$，後面可視為有 m 組，首項為 15，公差為 3 的等差級數。 因可能有不滿一組的項，所以可列式$\frac{[2\cdot15+(m-1)3]\times m}{2}\le 6240-658=5582$，得到 最接近的正整數$m=56$，此 m 組的和為 5460。至此共有$56\times3+14=182$個數 不滿一組的數字和為$5582-5460=122$，為$[\frac{183}{3}]+[\frac{184}{3}]$，所以所求為 184。	104 台 中 一 中			A 0 0 1 4
1	假設 A 細菌每過 5 小時數量變為 4 倍，B 物質每過 15 小時重量變為$\frac{4}{5}$倍。2015 年 4 月 1 日零時，量測出 A 細菌的總數為 n 個及 B 物質的重量為 W 公克，一段時間後，A 細菌變為$10^{10}n$個，B 物質的重量為 rW 公克。則 r 之值為？(四捨五入至小數點第一位) 【解答】0.3 【詳解】設時間經過$15t$小時，則有$\begin{cases} r=(\frac{4}{5})^t \\ 10^{10}=4^{3t} \end{cases}$，兩式同取$\log$可得 $\begin{cases} \log r=t(3\log2-1) \\ 10=6t\log2 \end{cases}$，相除可得$\frac{\log r}{10}=\frac{3\log2-1}{6\log2}$，$\log r\approx-0.5371=0.4629-1$。 所以$r\approx3\times10^{-1}=0.3$ 。	104 台 中 一 中			A 0 0 1 5

1	在銳角ΔABC中，$a=\overline{BC},b=\overline{CA},c=\overline{AB}$，R 為$\Delta ABC$的外接圓半徑，O 為$\Delta ABC$的外心，H 為$\Delta ABC$的垂心，請證明 $\left\|\overrightarrow{OH}\right\|^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$ 。 【證明】由尤拉線的結果可證明$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=3\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 。 利用$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{OH}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right\|^2$ $=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2+2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$ $=R^2+R^2+R^2+2R^2(\frac{R^2+R^2-c^2}{2\times R\times R}+\frac{R^2+R^2-a^2}{2\times R\times R}+\frac{R^2+R^2-b^2}{2\times R\times R})$ $=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$	104 台 中 一 中			A P 0 0 1