

國立嘉義高中 103 學年度科學班-數學科實驗實作試題

本卷共有四題，都需要觀察，綜合整理觀察所得，最後驗證。作答時間 8:30~11:00。

第一題、(20 分)

觀察下列等式

$$\frac{5^3+2^3}{5^3+3^3} = \frac{5+2}{5+3}$$

$$\frac{6^3+1^3}{6^3+5^3} = \frac{6+1}{6+5}$$

$$\frac{7^3+4^3}{7^3+3^3} = \frac{7+4}{7+3}$$

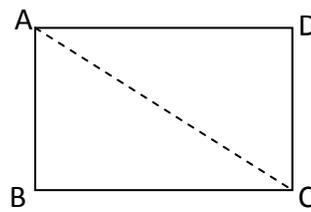
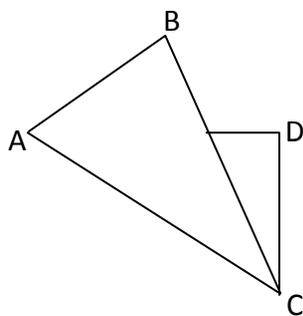
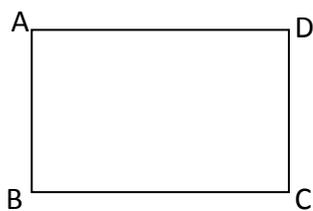
$$\frac{9^3+5^3}{9^3+4^3} = \frac{9+5}{9+4}$$

- (1) 請用代數符號描述你所觀察到的等式。(10 分)
- (2) 證明你所觀察的等式。(10 分)

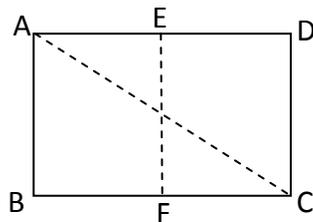
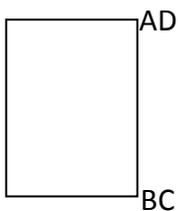
第二題、(20 分)

我們用以下的步驟將一張 A4 的紙張摺成三等份。

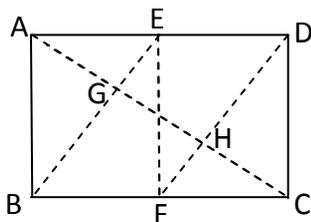
步驟一：先摺出對角線 \overline{AC} 。



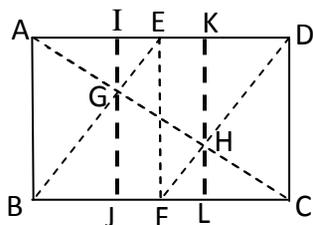
步驟二：再對摺紙張使 \overline{AB} 與 \overline{CD} 重合，得到折線 \overline{EF} 。



步驟三：分別摺出矩形 ABFE 和矩形 EFCD 的對角線 \overline{BE} 和 \overline{FD} ，假設交 \overline{AC} 於 G、H。



步驟四：分別過 G、H 摺出 \overline{AB} 的平行線 \overline{IJ} 、 \overline{KL} ，則矩形 ABJI、矩形 IJLK 和矩形 KLCD 的面積都相等。



試證明：用上面的摺紙步驟可將這張 A4 的紙三等分。

第三題、(30 分)

已知連續 n 個正整數和 $1+2+3+\dots+n$ 為 $\frac{n(n+1)}{2}$ ，若想求得連續 n 個正整數的平方和 $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ ，

可用以下的方式推論出和為 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

方法如下

由乘法公式知 $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$
 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ ------(1)

利用等式(1)，將 k 用 $1, 2, 3, 4, \dots, n$ 代入，得

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

.....

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

將以上的等式左右各別相加，得

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n+1)^3 - 1^3 - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = n^3 + 3n^2 + 3n - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{n(2n^2 + 6n + 6 - 3n - 3 - 2)}{2}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

請仿以上方法推出連續正整數立方和 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ 。

(提示：可利用公式 $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$)

第四題、(30分)

現有 n 堆棋子，第 i 堆有 m_i 個棋子 ($i=1, 2, 3, \dots, n$)，故共有 $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 個棋子。今有甲乙兩人約定：

- (1) 由甲先拿棋子，之後由乙拿棋子，依此順序進行。
- (2) 每一次拿棋子，只能自某一堆中拿，每次至少拿一個，也可以全拿。
- (3) 拿到最後一個棋子的人為勝利者。

請問有勝利方程式嗎？請將觀察的過程寫出來。

(提示：可由兩堆棋子開始觀察，因為是兩人之比賽，或許二進位會有幫助。)