4. 小華的抽屜裡有5雙襪子，每雙一種顏色，五雙顏色都不相同。週一小華在抽屜的10隻襪子中隨意的取了兩隻，週二小華在剩下的8隻襪子中再隨意的取了2隻，且週三小華又在剩下的6隻襪子中隨意的取了2隻。若週三所選的2隻襪子是第一次可以配成一雙，其機率爲$\dfrac{m}{n}$，其中m與n爲互質的正整數，試求$m+n$之值。

【104AIME】

答：341

解：機率

$$=\frac{\underbrace{C^{5}_{1}}_{\text{週三同色成雙}}\times\left[\underbrace{C^{4}_{2}}_{\text{週一兩色}}\times\underbrace{C^{2}_{1}C^{2}_{1}}_{\text{每色一隻}}\right]\times\left[\underbrace{C^{6}_{2}}_{\text{週二兩隻}}-\underbrace{2}_{\text{兩隻同色}}\right]}{C^{10}_{2}C^{8}_{2}C^{6}_{2}}$$

$$=\frac{5\times[24][13]}{18900}=\frac{26}{315}$$

5. 點B在$\overline{AC}$上使得$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=1$，點D與點E在直線AC的同側使得ΔABD與ΔBCE均爲正三角形。若M爲$\overline{AE}$的中點，N爲$\overline{CD}$的中點，ΔBMN的面積爲x，且$x^2=\dfrac{m}{n}$，其中m、n爲互質的正整數，試求$m+n$之值。

【104AIME】

答：763

解：令$A(0,0)$、$B(4,0)$、$C(5,0)$、$D\left(2,2\sqrt{3}\right)$、$E\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

故$M\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$、$N\left(\dfrac{7}{2},\sqrt{3}\right)$ 則$\overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{-7}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{BN}$

$=\left(\dfrac{-1}{2},\sqrt{3}\right)$

$$\text{故}\Delta BMN\text{ 面積}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\dfrac{-7}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ \dfrac{-1}{2} & \sqrt{3}\end{matrix}\right\|=\frac{13\sqrt{3}}{16}\Rightarrow x^2=\frac{507}{256}$$

11. 考慮集合$\{1,2,3,\cdots\cdots,2015\}$所有恰含1000個元素的子集合，從每一個子集合取出最小的元素，已知所有這些最小元素的算數平均數爲$\dfrac{p}{q}$，其中p、q爲互質的正整數，試求$p+q$之值。

【104AIME】

$\boxed{答}$：431

$\boxed{解}$：所求平均$=\dfrac{\underbrace{1\times C_{999}^{2014}}_{最小數1}+\underbrace{2\times C_{999}^{2013}}_{最小數2}+\underbrace{3\times C_{999}^{2012}}_{最小數3}+\cdots+\underbrace{1016\times C_{999}^{999}}_{最小數1016}}{C_{1000}^{2015}}$

$$=\frac{\begin{array}{r}C_{999}^{2014}+C_{999}^{2013}+C_{999}^{2012}+\cdots+C_{999}^{999}\\+C_{999}^{2013}+C_{999}^{2012}+\cdots+C_{999}^{999}\\+C_{999}^{2012}+\cdots+C_{999}^{999}\\+\cdots\cdots\cdots\\+C_{999}^{999}\end{array}}{C_{1000}^{2015}}$$

$$=\frac{C_{1000}^{2015}+C_{1000}^{2014}+C_{1000}^{2013}+\cdots\cdots+C_{1000}^{1000}}{C_{1000}^{2015}}$$

$$=\frac{C_{1001}^{2016}}{C_{1000}^{2015}}=\frac{\dfrac{2016!}{1001!\times1015!}}{\dfrac{2015!}{1000!\times1015!}}=\frac{2016}{1001}=\frac{288}{143}$$