

12. $\triangle ABC$ 的各邊邊長均為正整數，且 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。設 $\angle B$ 與 $\angle C$ 的分角線交於 I 點，且 $\overline{BI} = 10$ ，試求 $\triangle ABC$ 最小可能的周長。

【104AIME】

答：135

解：∵ $\cos \theta = \frac{x}{10}$ ， $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$

$$\therefore 2\left(\frac{x}{10}\right)^2 - 1 = \frac{x}{y} \Rightarrow (x^2 - 50)y = 50x > 0$$

$$\therefore 2x, y \in \mathbb{N} \quad \therefore x = \frac{15}{2}, \frac{16}{2}, \frac{17}{2}, \frac{18}{2}, \frac{19}{2}$$

$$\text{逐一代入} \Rightarrow y = 60, \frac{400}{7}, \frac{425}{89}, \frac{450}{31}, \frac{1900}{161}$$

故 $\triangle ABC$ 周長為 $2y + 2x = 120 + 15 = 135$

