



$$\leq \frac{ab}{a^3b^3(a^2+b^2)+ab} = \frac{1}{a^2b^2(a^2+b^2)+1}$$

$$= \frac{ab}{a^2b^2c^2(a^2+b^2)+c^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\text{即 } \frac{ab}{a^8+b^8+ab} \leq \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

$$\text{同理, } \frac{bc}{b^8+c^8+bc} \leq \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\frac{ca}{c^8+a^8+ca} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

将这三个不等式叠加, 即得所要证明的不等式, 其中等号当且仅当  $a=b=c=1$  时成立.

$$479. \text{ 求证: } \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \cos^n \left( \frac{j\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

证: 设  $\omega = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$ , 则  $\omega^{\pm j} = \cos \frac{j\pi}{n} \pm i \sin \frac{j\pi}{n}$ ,

$$\cos \frac{j\pi}{n} = \frac{1}{2}(\omega^j + \omega^{-j}), \omega^n = -1. \text{ 因此,}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \cos^n \left( \frac{j\pi}{n} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{nj} \left( \frac{\omega^j + \omega^{-j}}{2} \right)^n \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^n \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{nj} \sum_{k=0}^n C_n^k \omega^{j(n-2k)} \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(2n-2k)}. \end{aligned}$$

注意到, 当  $k$  不为 0 也不为  $n$  时,  $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(2n-2k)} = 0$ ; 当  $k=0$  或  $k=n$  时,

$$= \frac{1 - (\omega^{2n-2k})^n}{1 - \omega^{2n-2k}} = 0; \text{ 当 } k=0 \text{ 或 } k=n \text{ 时,}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(2n-2k)} = n, \text{ 故所求的和为}$$

$$\frac{1}{2^n} (nC_n^0 + nC_n^n) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

480. 四面体  $A_1A_2A_3A_4$  的旁切球半径为  $r_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ), 内切球半径为  $r$ , 外接球半径为  $R$ , 求证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{A_i A_j^2}{r_i r_j} \leq 4 \left( \frac{R}{r} \right)^2.$$

证: 先证一个一般化的结论: 对任意  $\lambda_i > 0$  ( $1 \leq i \leq 4$ ), 有

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j A_{ij}^2 \leq \left( \sum_{i=1}^4 \lambda_i \right)^2 R^2. \quad (1)$$

在四面体  $A_1A_2A_3A_4$  中,  $A_i$  对面记为  $S_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ),  $S_i, S_j$  夹角记为  $\theta_{ij}$ . 由各面间射影关系有

$$S_i = S_j \cos \theta_{ij} + S_k \cos \theta_{ik} + S_l \cos \theta_{il}. \quad (2)$$

其中  $i, j, k, l$  是 1, 2, 3, 4 的一个排列. 且  $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ . 在(2)两边同乘以  $\frac{\lambda_i^2}{S_i}$ , 并两边取  $\sum$ , 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \left( \lambda_i^2 \frac{S_j}{S_i} + \lambda_j^2 \frac{S_i}{S_j} \right) \cos \theta_{ij} \\ &\geq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} 2\lambda_i \lambda_j \cdot \cos \theta_{ij}, \end{aligned}$$

或

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 \geq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j \cos \theta_{ij}. \quad (3)$$

取四面体  $A_1A_2A_3A_4$  的外心  $O$ , 过点  $A_i$  作平面  $S'_i$ , 使  $S'_i$  与  $OA_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 垂直, 则  $S'_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 交成四面体  $A'_1A'_2A'_3A'_4$  ( $A'_1$  是面  $S'_2, S'_3, S'_4$  的交点, 其余类同). 在此四面体中, 记  $S'_i, S'_j$  的夹角为  $\theta'_{ij}$ , 则由  $OA_i \perp S'_i, OA_j \perp S'_j$  可知,  $\angle A_i O A_j = \pi - \theta'_{ij}$ .

在等腰  $\triangle A_i O A_j$  中, 由余弦定理, 有

$$\begin{aligned} A_i A_j^2 &= OA_i^2 + OA_j^2 - \\ &\quad 2OA_i \cdot OA_j \cos \angle A_i O A_j \\ &= R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(\pi - \theta'_{ij}) \\ &= 2R^2(1 + \cos \theta'_{ij}). \end{aligned}$$

对此式两边同乘  $\lambda_i \lambda_j$ , 取  $\sum$ , 得

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j A_i A_j^2 \\ &= 2R^2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j (1 + \cos \theta'_{ij}). \end{aligned} \quad (4)$$

将(3)代入(4)即得(1).

在(1)中由  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 的任意性, 特别取  $\lambda_i = \frac{1}{r_i}$  ( $1 \leq i \leq 4$ ), 并注意  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i} = \frac{2}{r}$ , 则知本题结论成立.

### 1999年第3期问题

481. 已知  $\triangle ABC$  的内切圆在  $BC, CA, AB$  上的切点分别为  $D, E, F$ , 且  $DG \perp EF$ ,  $G$  为垂足, 求证:  $GD$  平分  $\angle BGC$ .

(湖北 贺 斌 供题)

(下转第3-11页)