

$$\text{解：} \begin{cases} (x-2)=3(y-2) \\ (x-4)=4(y-4) \\ (x+t)=2(y+t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=8 \\ t=4 \end{cases}$$

7. 兩個直圓柱的體積相同，若第二個直圓柱的半徑較第一個直圓柱的半徑多第一個直圓柱半徑的10%，則兩個直圓柱高的關係為下列何者？

- (A) 第二個直圓柱的高較第一個直圓柱的高少第一個直圓柱高的10%
 (B) 第一個直圓柱的高較第二個直圓柱的高多第二個直圓柱高的10%
 (C) 第二個直圓柱的高較第一個直圓柱的高少第一個直圓柱高的21%
 (D) 第一個直圓柱的高較第二個直圓柱的高多第二個直圓柱高的21%
 (E) 第二個直圓柱的高是第一個直圓柱高的80%。

【2015AMC12A】

答：(D)

$$\text{解：} \pi \times r^2 \times h_1 = \pi (1.1r)^2 \times h_2 \Rightarrow h_1 = 1.21h_2$$

8. 某個長方形長與寬的比為4：3，若此長方形對角線的長為 d ，且其面積等於 kd^2 ，則 k 之值為何？

- (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{12}{25}$ (D) $\frac{16}{25}$ (E) $\frac{3}{4}$ 。

【2015AMC12A】

答：(C)

解：長 $4t$ ，寬 $3t$ ，對角線 $d=5t$

$$\text{面積} = kd^2 = 4t \times 3t \Rightarrow k = \frac{12t^2}{d^2} = \frac{12t^2}{25t^2} = \frac{12}{25}$$

9. 盒子中裝有2顆紅彈珠、2顆綠彈珠及2顆黃彈珠。小卡隨意地從盒子中取出2顆彈珠；接著小明再從盒內剩下的彈珠中隨意地取出2顆彈珠；然後小華再從盒子中取出最後的2顆彈珠。試問：小華取出2顆彈珠顏色相同的機率為多少？

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$ 。

【2015AMC12A】

答：(C)

$$\text{解：} \frac{C_1^6}{C_1^6} \times \frac{C_1^1}{C_1^5} = \frac{1}{5}$$

小華之第一球任取 小華第二球必與第一球同色

10. 整數 x 與 y 滿足 $x > y > 0$ ，若 $x + y + xy = 80$ ，則 $x = ?$

- (A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 18 (E) 26。

【2015AMC12A】

答：(E)

解：原式 $\Rightarrow (x+1)(y+1) = 81$ ，又 $x+1 > y+1 > 1$ ， $x, y \in N$
 故 $x+1=27$ 且 $y+1=3 \Rightarrow x=26, y=2$

11. 小許在一張紙上畫了一個半徑為2的圓及一個半徑為3的圓，並且畫出兩圓所有可能的公切線，小許發現他恰畫了 k 條直線， $k \geq 0$ 。試問 k 總共有多少種可能不同的值？

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6。

【2015AMC12A】

答：(D)

解：外離 ($k=4$)，外切 ($k=3$)，相交 ($k=2$)，內切 ($k=1$)，內離 ($k=0$)
共五種可能值

12. 兩拋物線 $y = ax^2 - 2$ 及 $y = 4 - bx^2$ 與坐標軸恰交於四點，
若這四點為一個面積為 12 的菱形的頂點，則 $a+b$ 之值為何？

(A) 1 (B) 1.5 (C) 2 (D) 2.5 (E) 3。

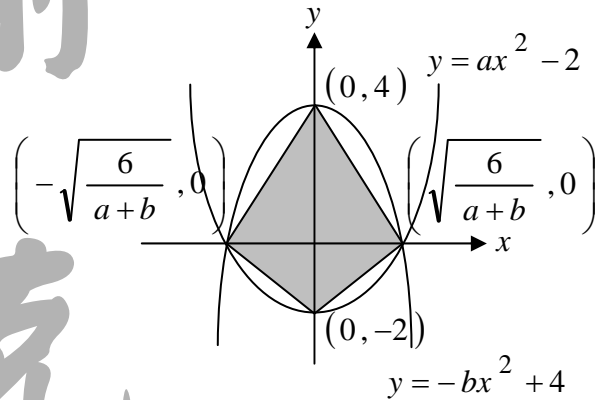
【2015AMC12A】

答：(B)

解：
$$\begin{cases} y = ax^2 - 2 \\ y = -bx^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{6}{a+b}}$$

菱形面積 = $2 \sqrt{\frac{6}{a+b}} \times 6 \times \frac{1}{2} = 12$

$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$



13. 某聯盟中有 12 支球隊舉行循環賽，每一隊都恰與其他各隊比賽一場，
每一場比賽的結局可能是一隊獲勝或兩隊平手，獲勝者得積分 2 分，
平手者各得積分 1 分，關於 12 隊的積分紀錄，下列哪一個敘述是不對的？

- (A) 一定有偶數隊其積分為奇數 (B) 一定有偶數隊其積分為偶數
(C) 不可能有兩隊 0 分 (D) 所有積分的總和至少 100 分
(E) 最高的積分至少有 12 分。

【2015AMC12A】

答：(E)

解：當各隊均以平手收場，則各隊均為 11 分

14. 若 $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} = 1$ ，則 a 的值為多少？

(A) 9 (B) 12 (C) 18 (D) 24 (E) 36。

【2015AMC12A】

答：(D)

解：原式 = $\log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 4 = \log_a 24 = 1 \Rightarrow a = 24$

15. 若將 $\frac{123456789}{2^{26} \cdot 5^4}$ 用小數表示，則此數在小數點後最少有幾位數？

(A) 4 (B) 22 (C) 26 (D) 30 (E) 104。

【2015AMC12A】

答：(C)

解：原式 = $\frac{123456789 \times 5^{22}}{2^{26} \times 5^{26}} = \frac{123456789 \times 5^{22}}{10^{26}}$

表小數點後有 26 位

16. 四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{AC} = 3$ 、 $\overline{BC} = 4$ 、 $\overline{BD} = 4$ 、 $\overline{AD} = 3$ ，且 $\overline{CD} = \frac{12}{5}\sqrt{2}$ ，

試問此四面體的體積為多少？

(A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $\frac{24}{5}$ (D) $3\sqrt{3}$ (E) $\frac{24}{5}\sqrt{2}$ 。

【2015AMC12A】

答：(C)

解：取 \overline{AB} 上點 H ，使 $\angle AHC = \angle AHD = 90^\circ \Rightarrow \overline{CH} = \overline{DH} = \frac{12}{5}$

$$\text{又 } \overline{CD} = \frac{12}{5}\sqrt{2}, \text{ 故 } \triangle CDH \text{ 面積} = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{72}{25}$$

$$\text{故四面體體積} = \frac{72}{25} \times 5 \times \frac{1}{3} = \frac{24}{5}$$

17. 八個人圍一圓桌而坐，每人都握有一枚公正的硬幣，八個人都投擲硬幣後，若出現正面則站起來，若出現反面則仍坐著，試問沒有相鄰的兩人都是站立的機率為多少？

- (A) $\frac{47}{256}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{49}{256}$ (D) $\frac{25}{128}$ (E) $\frac{51}{256}$ 。 【2015AMC12A】

答：(A)

解：樣本空間 $= 2^8 = 256$

$$\text{事件} = \underbrace{1}_{\substack{\text{無人} \\ \text{站立}}} + \underbrace{8}_{\substack{\text{1人} \\ \text{站立}}} + \underbrace{\left(C_2^8 - 8\right)}_{\substack{\text{2人相連} \\ \text{2人站立}}} + \underbrace{\left(C_3^8 - 8 - 8 \times 4\right)}_{\substack{\text{3人相連} \quad \text{2人相連} \quad \text{另1人} \\ \text{3人站立}}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{4人} \\ \text{站立}}} = 47$$

$$\text{機率} = \frac{47}{256}$$

18. 求滿足方程式 $x^2 - ax + 2a = 0$ 的解均為整數的所有可能 a 之和為多少？

- (A) 7 (B) 8 (C) 16 (D) 17 (E) 18 。 【2015AMC12A】

答：(C)

解： $\alpha + \beta = a$ 且 $\alpha\beta = 2a \Rightarrow \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)(\beta - 2) = 4$

$$\begin{array}{c|cccccc} \alpha - 2 & 1 & 2 & 4 & -1 & -2 & -4 \\ \hline \beta - 2 & 4 & 2 & 1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \Rightarrow \alpha + \beta - 4 = 5 \text{ 或 } 4 \text{ 或 } -5 \text{ 或 } -4$$

$$\Rightarrow \alpha - 4 = 5 \text{ 或 } 4 \text{ 或 } -5 \text{ 或 } -4 \Rightarrow \alpha = 9 \text{ 或 } 8 \text{ 或 } -1 \text{ 或 } 0 \Rightarrow \text{總和為 } 16$$

19. 對於某些正整數 p ，存在四邊形 $ABCD$ 滿足各邊的邊長均為正整數，周長為 p ， $\angle B$ 與 $\angle C$ 均為直角， $\overline{AB} = 2$ ，且 $\overline{CD} = \overline{AD}$ ，試問有多少個不同的 $p < 2015$ ？

- (A) 30 (B) 31 (C) 61 (D) 62 (E) 63 。 【2015AMC12A】

答：(B)

解： $\overline{AD} = \overline{CD} = x$ ， $\overline{BC} = y$ ， $\overline{AB} = 2$ ， $x, y \in N$

$$\text{故 } (2-x)^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = 4(x-1) \text{ 為完全平方，令 } x = t^2 + 1, y = 2t, t \in N$$

$$\text{則 } P = 2x + y + 2 = 2t^2 + 2t + 3 < 2015 \Rightarrow t(t+1) < 1006 \Rightarrow t = 1 \sim 31$$

20. 設 T 與 T' 是兩個不全等的等腰三角形，它們有相同的面積與相同的周長。

若三角形 T 的三邊長分別為 5、5 與 8；而三角形 T' 的三邊長分別為 a 、 a 與 b ，則下列哪一個數最接近 b ？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8 。 【2015AMC12A】

答：(A)

解： T 之面積 $= 8 \times 3 \times \frac{1}{2} = 12$ ，周長 $5 + 5 + 8 = 18$

$$\text{故 } T' \text{ 之面積 } b \times \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\text{故 } T' \text{ 之周長 } 2a + b = 18 \Rightarrow a = \frac{18-b}{2}$$

$$\text{則 } b \times \sqrt{\left(\frac{18-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \times \frac{1}{2} = 12 \Rightarrow b^3 - 9b^2 + 64 = 0$$

$$\Rightarrow (b-8) \left[b^2 - b - 8 \right] = 0 \Rightarrow b = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \text{ 或 } 8$$

$$\text{其中 } 8 \in T, \frac{1 - \sqrt{33}}{2} \text{ 不合, 故 } b = \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \doteq 3.37 \dots$$

21. 一個半徑為 r 的圓通過橢圓 $x^2 + 16y^2 = 16$ 的兩個焦點，且與橢圓交於四點，若所有可能 r 的範圍為一個區間 $[a, b)$ ，則 $a+b$ 之值為何？

- (A) $5\sqrt{2} + 4$ (B) $\sqrt{17} + 7$ (C) $6\sqrt{2} + 3$ (D) $\sqrt{15} + 8$ (E) 12。 【2015AMC12A】

答：(D)

解：橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$ 之中心 $(0, 0)$ ， $a=4$ ， $b=1$ ， $c=\sqrt{15}$

故焦點 $(-\sqrt{15}, 0)$ 、 $(\sqrt{15}, 0)$ ，短軸頂點 $(0, 1)$ 、 $(0, -1)$

(i) 當圓以 $(-\sqrt{15}, 0)$ 、 $(\sqrt{15}, 0)$ 為直徑端點時， $r = \sqrt{15}$

(ii) 當圓過 $(-\sqrt{15}, 0)$ 、 $(\sqrt{15}, 0)$ 、 $(0, 1)$ 時， $r = 8$

故 $[a, b) = [\sqrt{15}, 8)$

22. 對每一個正整數 n ，設 $S(n)$ 表所有由文字 A 或 B 所形成的長度為 n （即 n 個文字排列）的序列，每一個序列不能有超過 3 個 A 連在一起，也不能有超過 3 個 B 連在一起，試問 $S(2015)$ 除以 12 餘數為何？

- (A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10。 【2015AMC12A】

答：(D)

解：令 $A(n)$ 表長度 n ，而末位為 A 之序列個數

令 $B(n)$ 表長度 n ，而末位為 B 之序列個數

基於將條件對等，故 $A(n) = B(n)$

且 $S(n) = A(n) + B(n)$ ，故 $S(n) = 2A(n) = 2B(n)$

又不能有超過 3 個 A ，或 3 個 B 連續

故 $A(n) = B(n-1) + B(n-2) + B(n-3)$

而 $B(n) = A(n-1) + A(n-2) + A(n-3)$

則 $A(n) = A(n-1) + A(n-2) + A(n-3)$ (遞迴)

即 $\langle A(n) \rangle = \langle 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, \dots \rangle$

即 $\langle A(n) \rangle$ 除以 6 的餘數 = $\langle A(n-1) + A(n-2) + A(n-3) \rangle$ 除以 6 的餘數 (遞迴)

$$= \langle 1, 2, 4, 1, 1, 0, 2, 3, 5, 4, 0, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 5, 1, 4, 4, 3, 5, 0, 2, 1, 3, 0, 4, 1, 5, 4, 4, 1, 3, 2, 0, 5, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 1, 1, 0, 2, 3, 5, 4, 0, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 4, 3, 3, 4, \dots \rangle$$

} 每 52 項
出現循環

4, 5, 1, 4, 4, 3, 5, 0, 2, 1, 3, 0, 4,
 1, 5, 4, 4, 1, 3, 2, 0, 5, 1, 0, 0, 1, ……)

則 $S(2015)$ 除以 12 餘數，等同 $A(2015)$ 除以 6 餘數的「兩倍」
 亦等同 $A(39)$ 除以 6 餘數的「兩倍」 $= 4 \times 2 = 8$

23. 設 S 是一個邊長為 1 的正方形，在 S 的邊上任選兩點，

若這兩點連線段長至少是 $\frac{1}{2}$ 的機率為 $\frac{a-b\pi}{c}$ ，其中 a, b, c 均為正整數，

且 a, b, c 的最大公因數為 1，則 $a+b+c=?$

(A) 59 (B) 60 (C) 61 (D) 62 (E) 63。

【2015AMC12A】

答：(A)

解：將正方形邊長（已知為 1）

分成八段，並以 A 段為主

考量第 2 點可能所在區段

(i) 當第 2 點 $\in C, D, E, F, G$

兩點距離必 $\geq \frac{1}{2}$ ，機率 $\frac{5}{8}$

(ii) 當第 2 點 $\in B$ ，兩點距離 $\geq \frac{1}{2}$

之機率為 $\frac{1}{8} \times \frac{(0+1) \times 1}{2} = \frac{1}{16}$

(iii) 當第 2 點 $\in H$ ，兩點距離 $\geq \frac{1}{2}$

之機率為 $\frac{1}{8} \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{\pi}{32}$

合計

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{\pi}{32}$$

$$= \frac{26 - \pi}{32}$$

$$= \frac{26 - \pi}{32}$$

試

24. 考慮所有在區間 $[0, 2)$ 中可以表示成 $\frac{n}{d}$ 形式的有理數所組成的集合，

其中 n 與 d 為整數且 $1 \leq d \leq 5$ 。在此集中任取兩個有理數 a, b ，

則 $(\cos(a\pi) + i\sin(b\pi))^4$ 為實數的機率為何？

(A) $\frac{3}{50}$ (B) $\frac{4}{25}$ (C) $\frac{41}{200}$ (D) $\frac{6}{25}$ (E) $\frac{13}{50}$ 。

【2015AMC12A】

答：(D)

解： $\frac{n}{d} \in \mathbb{Q}, -1 \leq d \leq 5 \Rightarrow \frac{n}{d} = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$

故 $a, b \in \left\{ \frac{n}{d} \mid \frac{n}{d} = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5} \right\}$

則樣本空間 $= 20 \times 20 = 400$

而事件 $((\cos(a\pi) + i\sin(b\pi))^4)$ 之虛數 $= 0$

$$\text{即 } 4\cos^3(a\pi)\sin(b\pi) - 4\cos(a\pi)\sin^3(b\pi) = 0$$

$$\text{即 } 4\cos(a\pi)\sin(b\pi) \left[\cos^2(a\pi) - \sin^2(b\pi) \right] = 0$$

(i) $\cos(a\pi) = 0$ ，有 $a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 兩種，此時 b 有 20 種

$\sin(b\pi) = 0$ ，有 $b = 0, 1$ 兩種，此時 a 有 20 種

$\cos(a\pi) = 0$ 且 $\sin(b\pi) = 0$ ，有 $2 \times 2 = 4$ 種

(ii) $\cos^2(a\pi) = \sin^2(b\pi) = 1$ ，有 $2 \times 2 = 4$ 種

$\cos^2(a\pi) = \sin^2(b\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，有 $4 \times 4 = 16$ 種

合計 $(40 + 40 - 4) + (4 + 16) = 96$ 種

機率 $\frac{96}{400} = \frac{6}{25}$

25. 如圖所示，一些圓在上半平面，它們都與 x 軸相切。

第 0 層 L_0 是由兩個大圓所組成的集合，它們彼此外切，且半徑分別為 70^2 與 73^2 。

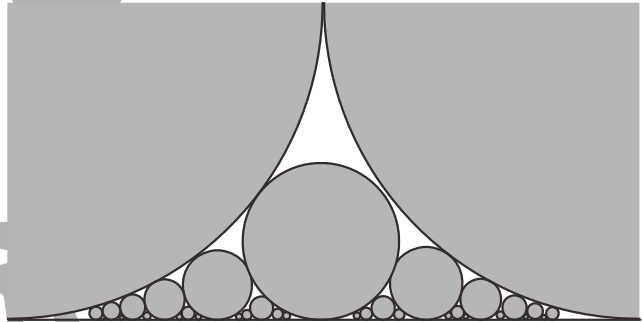
對於 $k \geq 1$ ，第 k 層 L_k 是由 2^{k-1} 個圓組成的集合，而這些圓是依照以下方法產生：

將 L_0 、 L_1 、 \dots 、 L_{k-1} 中的圓（以 $U_{j=0}^{k-1} L_j$ 表之）依照它們與 x 軸相切的順序排列時，

每兩個接續的圓中間，都新增一個圓與此兩圓外切。令 $S = U_{j=0}^6 L_j$ ，對每一個圓 C ，

以 $r(C)$ 表示其半徑。試問 $\sum_{C \in S} \frac{1}{\sqrt{r(C)}}$ 之值為何？

- (A) $\frac{286}{35}$
 (B) $\frac{583}{70}$
 (C) $\frac{715}{73}$
 (D) $\frac{143}{14}$
 (E) $\frac{1573}{146}$ 。



【2015AMC12A】

答：(D)

析：預備知識

$$\overline{BR} = \overline{CP} + \overline{CQ}$$

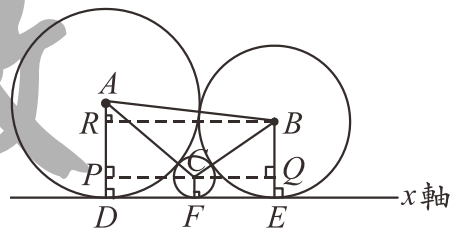
$$\Rightarrow \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

$$= \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2}$$

$$+ \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4r_1r_2} = \sqrt{4r_1r_3} + \sqrt{4r_2r_3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$



解： L_0 ：有兩個圓： $\sum \frac{1}{\sqrt{r(C)}} = \frac{1}{\sqrt{r(C_{0a})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{0b})}} = \frac{1}{70} + \frac{1}{73}$

L_1 ：有 1 個圓： $\sum \frac{1}{\sqrt{r(C)}} = \frac{1}{\sqrt{r(C_1)}} = \frac{1}{\sqrt{r(C_{0a})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{0b})}} = \frac{1}{70} + \frac{1}{73}$

L_2 ：有 2 個圓： $\sum \frac{1}{\sqrt{r(C)}} = \frac{1}{\sqrt{r(C_{2a})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{2b})}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{r(C_{0a})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_1)}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_1)}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{0b})}}$$

$$= 3 \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{73} \right)$$

$$L_3 : \text{有4個圓} : \sum \frac{1}{\sqrt{r(C)}} = \frac{1}{\sqrt{r(C_{3a})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{3b})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{3c})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{3d})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r(C_{0a})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{2a})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{2a})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_1)}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_1)}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{2b})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{2b})}} + \frac{1}{\sqrt{r(C_{0b})}}$$

$$= 9 \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{73} \right)$$

$$L_4 : \sum \frac{1}{\sqrt{r(C)}} = 27 \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{73} \right)$$

$$L_5 : \sum \frac{1}{\sqrt{r(C)}} = 81 \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{73} \right)$$

$$L_6 : \sum \frac{1}{\sqrt{r(C)}} = 243 \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{73} \right)$$

$$\text{所求} = (1+1+3+9+27+81+243) \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{73} \right) = 365 \times \frac{143}{70 \times 73} = \frac{143}{14}$$

克
斌
數
學