103 學年度台灣省北二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 已知 E、F、G、H 分別為正方形 $ABCD$ 四邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 上的點。

(1) 若 $\overline{EG} \perp \overline{FH}$，試證 $\overline{EG} = \overline{FH}$。 (10 分)

(2) 若僅給定 E、F、G、H 四點，試以尺規作圖作出此正方形 $ABCD$（寫出作法並證明之）。 (6 分)

問題二： 設實數 $a,b,c \geq 0$ 且滿足 $a+b+c=1$，試證：$ab+bc+ca-2abc \leq \dfrac{7}{27}$。

(16 分)

問題三： 將一圓用 n 條直徑等分成 $2n$ 個扇形，任選其中 n 個塗紅色，另 n 個塗藍色。將紅色扇形與藍色扇形分別編號如下：紅色扇形從某一個起依順時針順序寫上 $1,2,\cdots,n$，藍色扇形從某一個起依逆時針順序寫上 $1,2,\cdots,n$。證明存在一個半圓，出現 $1,2,\cdots,n$ 的每一個數。 (17 分)

103 學年度台灣省北二區（新竹高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（二）試題

編號：________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 若$2x+y\geq 1$，則y^2-2y+x^2+4x的最小值為__（ 一 ）__。
2. 設一自然數的個位數為 6，若將個位數去掉並移至首位後，所得到的新自然數是原數的 4 倍。求此自然數的最小可能值為__（ 二 ）__。
3. 在數列$\langle a_n\rangle$中，$a_1=1$，$a_2=-2$，且$a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，$n=1,2,\cdots$，則

   $a_{2014}=$__（ 三 ）__。
4. 設$f(x)$為定義在實數上的實數值函數且$f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x$。當$|x|=a$時，$|f(x)|$有最小值b，則$a+b$之值為__（ 四 ）__。
5. 設ΔABC中，最大角A為最小角B的 2 倍。若ΔABC三邊長為連續的正整數，則其三邊長的和為__（ 五 ）__。
6. 求函數$f(x)=|\sec x|+|\tan^2 x-1|$ 的最小值為__（ 六 ）__。
7. 將A,A,A,B,B,B,C,C,C九個字母作直線排列，相同字母不相鄰，有__（ 七 ）__種不同排法。

103學年度台灣省北二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
（數學科筆試一答案卷）

編號：______________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序寫在答案卷內。

評　分　欄

題 號	問 題 一	問 題 二	問 題 三
評 分			

總分：______________________

問題一：已知E、F、G、H分別為正方形$ABCD$四邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$上的點。

(1) 若$\overline{EG} \perp \overline{FH}$，試證$\overline{EG} = \overline{FH}$。 (10 分)

(2) 若僅給定E、F、G、H四點，試以尺規作圖作出此正方形$ABCD$（寫出作法並證明之）。 (6 分)

【解答】：

問題二：設實數$a,b,c\ge 0$且滿足$a+b+c=1$，試證：$ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$。

(16 分)

【證明】：

問題三：將一圓用 n 條直徑等分成 $2n$ 個扇形，任選其中 n 個塗紅色，另 n 個塗藍色。將紅色扇形與藍色扇形分別編號如下：紅色扇形從某一個起依順時針順序寫上 $1, 2, \cdots, n$，藍色扇形從某一個起依逆時針順序寫上 $1, 2, \cdots, n$。證明存在一個半圓，出現 $1, 2, \cdots, n$ 的每一個數。 (17 分)

【證明】：

103 學年度台灣省北二區（新竹高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試二答案欄）

編號：______________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答　案　欄

(一)	(二)	(三)	(四)

(五)	(六)	(七)

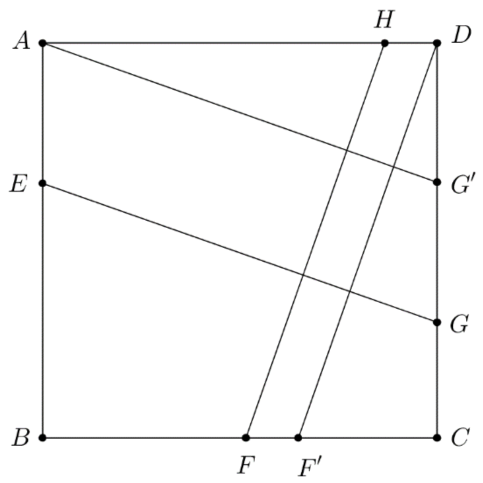
總分：______________________

問題一： 已知 E 、 F 、 G 、 H 分別為正方形 $ABCD$ 四邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 上的點。

(1) 若 $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ，試證 $\overline{EG} = \overline{FH}$ 。 (10 分)

(2) 若僅給定 E、F、G、H 四點，試以尺規作圖作出此正方形 $ABCD$（寫出作法並證明之）。 (6 分)

【解答】：



(1) ① 過 A 點作 $\overline{EG}$ 平行線交直線 DC 於 G' 點，

且過 D 點作 $\overline{HF}$ 平行線交直線 BC 於 F' 點。

② $\triangle ADG' \cong \triangle DCF'$，故 $\overline{AG'} = \overline{DF'}$

③ $\overline{EG} = \overline{AG'} = \overline{DF'} = \overline{HF}$ 。

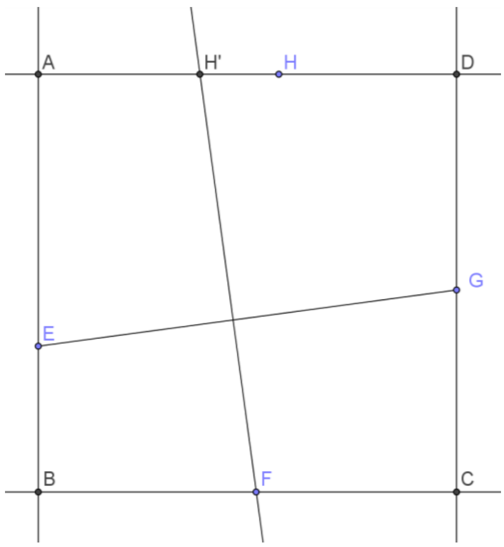
(2) ① 作 $\overline{FH'} \perp \overline{EG}$ 且 $\overline{FH'} = \overline{EG}$ 。

② 作 $\overline{EA} \perp \overline{HH'}$ 交 $\overline{HH'}$ 於 A 點，

③ 作 $\overline{FB} \perp \overline{EA}$ 交 $\overline{EA}$ 於 B 點，

④ 作 $\overline{GC} \perp \overline{FB}$ 交 $\overline{FB}$ 於 C 點，交 $\overline{HH'}$ 於 D 點，

⑤ 正方形 $ABCD$ 即為所求。



問題二： 設實數 $a,b,c\geq 0$ 且滿足 $a+b+c=1$，試證：$ab+bc+ca-2abc\leq\dfrac{7}{27}$。

(16 分)

【證明】：

不失一般性可設 $a\geq b\geq c$，根據條件 $a+b+c=1$，可知

$$a\geq\frac{1}{3}\geq c \text{，} a+b\geq\frac{2}{3}$$

因此可令

$$\begin{cases} a+b &= \frac{2}{3}+t \\ c &= \frac{1}{3}-t \end{cases}$$

其中 $0\leq t\leq\frac{1}{3}$。

利用上述條件可推得

$$\begin{aligned}
& ab+bc+ca-2abc \\
= \;& c(a+b)+ab(1-2c) \\
\leq \;& c(a+b)+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(1-2c) \\
= \;& \left(\frac{1}{3}-t\right)\left(\frac{2}{3}+t\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}+2t\right) \\
= \;& \frac{7}{27}-\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{2} \\
= \;& \frac{7}{27}-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right) \\
\leq \;& \frac{7}{27}
\end{aligned}$$

當 $t=0$ 時，等號成立，故得證。

問題三： 將一圓用 n 條直徑等分成 $2n$ 個扇形，任選其中 n 個塗紅色，另 n 個塗藍色。將紅色扇形與藍色扇形分別編號如下：紅色扇形從某一個起依順時針順序寫上 $1,2,\cdots,n$ ，藍色扇形從某一個起依逆時針順序寫上 $1,2,\cdots,n$ 。證明存在一個半圓，出現 $1,2,\cdots,n$ 的每一個數。 (17 分)

【證明】：

對於每一個 $i=1,2,\cdots,n$ ，計算紅 i 和藍 i 之間的劣弧距離，選 i 使得此距離為最小，稱此劣弧稱為 H_i 。

首先說明 H_i 內部（即紅 i 和藍 i 兩點不算）的所有點都必須同色，用反證法：
若非，因為紅藍一順一逆向，必能在 H_i 內找到一紅一藍足碼更大，此時此更大足碼的兩點構成的劣弧距離更短，與 i 的選取矛盾。

不妨設 H_i 內部的點都與左端點 i 同色，則 H_i 和 a 的分界直徑 L 即為所求。
證明如下：

(i) 若 i 是紅色，則由寫數的規則， L 向右的紅色數字為 $i+1,i+2,\cdots$ ，藍色數字為 $i,i-1,\cdots$。因為共有 n 個數，所以 $\bmod n$ 恰好為一個完全剩餘系，亦即半圓中 $1,2,\cdots,n$ 各出現一次。

(ii) 若 i 是藍色，則同樣由寫數規則， L 向右的藍色數字為 $i,i-1,\cdots$ ，紅色數字是 $i+1,i+2,\cdots$ 。理由同上，因為共有 n 個數，所以 $\bmod n$ 恰好為一個完全剩餘系，亦即半圓中 $1,2,\cdots,n$ 各出現一次。

103 學年度台灣省北二區（新竹高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
（數學科筆試二答案欄）

編號：______________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答　案　欄

（一）	（二）	（三）	（四）
$-\frac{9}{5}$	153846	1	$3\sqrt{2}$

（五）	（六）	（七）
15	$\sqrt{2}$	174

總分：______________________