103 學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽

數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

(1) 時間：2 小時（13:30～15:30）

(2) 配分：每題皆為 7 分

(3) 不可使用計算器

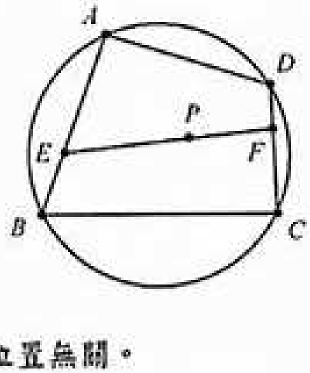
(4) 請將答案依序寫在答案卷內

一、設 a,b,c 都是正數，且 $a+b+c=3$。試證：

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le a^2b^2c^2 \text{。}$$

二、設 $ABCD$ 是一圓內接四邊形，點 E 與點 F 分別在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 上，且滿足

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}} \text{。}$$



試證：若點 P 在 $\overline{EF}$ 上，且滿足

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{PF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \text{，}$$

則 ΔAPD 與 ΔBPC 的面積比和 E、F 在所屬線段上的位置無關。

三、將 3466 表示成 n 個正整數的四次方之和：$3466=a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4$，其中 $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$。試問 n 的最小值為何？並對此最小值寫出所有對應的表示式。

103 學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽

數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

(1) 時間：2 小時（16:00～18:00）

(2) 配分：每題皆為 7 分

(3) 不可使用計算器

(4) 請將答案依序寫在答案卷內

一、設 m,n 為正整數，且 $m<n$。若在 0 與 n 之間插入任意 m 個整數

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_m<n$$

滿足：數列 $0,a_1,a_2,\cdots,a_m,n$ 中必有三數形成等差數列，則稱 m 為 n 的「等差數」；例如：3,4,5,6 都是 7 的等差數。設 $S(n)$ 表示 n 的最小等差數，且已知 $S(2)=1$、$S(7)=3$、$S(11)=5$、$S(12)=6$。試求 $S(13)$ 與 $S(14)$ 之值。

二、若正整數 m 可以表成

$$m=\sum_{k=1}^{103}\frac{k}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{103}{a_{103}},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{103}$ 都是正整數，則稱 m 是一個「好數」。試求所有好數的個數。

三、設 ΔABC 的三邊長滿足 $\overline{BC}\le\overline{CA}$ 及 $\overline{BC}\le\overline{AB}$。試證：對於 ΔABC 的內部每個點 P，恆有

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}<\overline{CA}+\overline{AB}。$$

103學年度普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽

數學科能力競賽決賽

口試試題

編號：______________（學生自填）

注意事項：

(1) 試卷共2題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間20分鐘；

(2) 攜帶本試卷到口試A組應試，答辯時間20分鐘，並繳回本試卷；

(3) 口試A組答辯結束後，到口試B組繼續應試，答辯時間20分鐘。

一、(限用幾何解法解題) 設 P 與 Q 為空間中二定點，ℓ 為空間中一直線，且 P、Q 與直線 ℓ 不共平面。試在直線 ℓ 上作出一點 M 使得：對於直線 ℓ 上每個點 X，恆有

$$\overline{PM}+\overline{QM}\le\overline{PX}+\overline{QX}$$ 。

二、設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足：$a_1=1, a_2=2$；當 $n\ge 3$ 時，$a_n>a_{n-1}$，且 a_n 是不能表成 a_i+a_j 的最小正整數，其中 $1\le i<j<n$。試求 a_{103} 之值。