有一個題目如下，就留給您自行證明

I 是 ΔABC 的內心，B_1, C_1 分別是 $\overline{AC}, \overline{AB}$ 的中點，$\overleftrightarrow{B_1 I}$ 交 $\overline{AB}$ 於 B_2，$\overleftrightarrow{C_1 I}$ 交 $\overline{AC}$ 之延長線於 C_2，則 ΔABC 和 ΔAB_2C_2 面積相等的充要條件是∠BAC=60度

所以您這題只要再證明

A, I, A_1 三點共線的充要條件是∠BAC=60度即可

$$\overline{BA_1} = \overline{CA_1}$$
$$\angle BA_1C = 360^\circ - 2\angle BHC = 360^\circ - 2\left(180^\circ - \angle BAC\right) = 2\angle BAC$$

$$\frac{\overline{AA_1}}{\sin \angle ABA_1} = \frac{\overline{BA_1}}{\sin \angle BAA_1}$$
$$\frac{\overline{AA_1}}{\sin \angle ACA_1} = \frac{\overline{CA_1}}{\sin \angle CAA_1}$$

A, I, A_1 三點共線

$\Leftrightarrow \angle BAA_1 = \angle CAA_1$

$\Leftrightarrow \sin \angle ABA_1 = \sin \angle ACA_1$

$\Leftrightarrow \angle ABA_1 + \angle ACA_1 = 180^\circ \left(\because \overline{AB} \neq \overline{AC}\right)$

$\Leftrightarrow A, B, A_1, C$ 四點共圓

$\Leftrightarrow \angle BA_1C + \angle BAC = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 2\angle BAC + \angle BAC = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ$