

數學科試題(共 3 頁)

一、填充題：(每格 4 分，共 60 分)

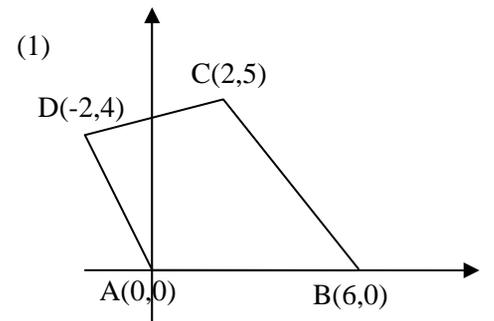
1. 若一個二位數其個位數與十位數對調，則新數為舊數的 $\frac{17}{5}$ 倍，問這樣的二位數有哪些？

2. 已知一等差數列，前 10 項的和是 103，前二十項的和是 309，請問此數列前三十項的和是多少？

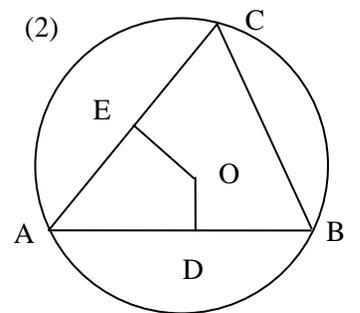
3. 若 A、B、C、D、E、F、G、H、I 分別代表數字 1~9 中的某個數，且滿足右側諸式
$$\begin{array}{r} A - B = C \\ \times \\ D \div E = F \\ \parallel \\ G + H = I \end{array}$$
，則序列 $(A, B, C, D, E, F, G, H, I) = ?$

4. 某阿拉伯酋長去世的時候留下若干隻駱駝給他的三個兒子，遺囑上說大兒子可以得到二分之一的駱駝，二兒子可以得到三分之一的駱駝，小兒子可以得到九分之一的駱駝。但是駱駝的總數不是 2、3 或 9 的倍數，所以一智者便加上自己的一隻駱駝來分配，這時候就可以完美的遵照酋長的遺囑而且智者還可以保留自己的駱駝，請問酋長留下多少隻駱駝？

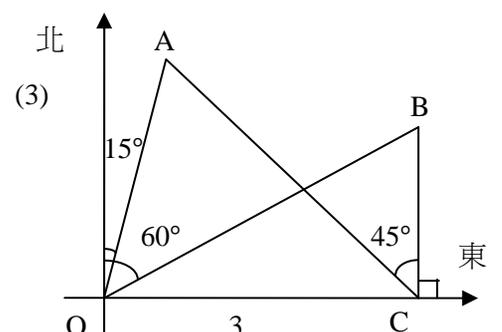
5. 如圖(1)，已知四邊形 ABCD 座標 $A = (0, 0)$ 、 $B = (6, 0)$ 、 $C = (2, 5)$ 、 $D = (-2, 4)$ ，若在四邊形內找一點 P 使得 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 有最小值，請問 P 點的座標是？



6. 如圖(2)，已知 O 為三角形 ABC 外接圓圓心且外接圓半徑為 25，若 $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ 且 $\overline{OD} = 7$ ， $\overline{OE} \perp \overline{AC}$ 且 $\overline{OE} = 15$ ，求 \overline{BC} 的長度。



7. 已知有一艘郵輪往正東方向航行，第一次觀測時在北 15° 東發現燈塔 A，在北 60° 東發現燈塔 B。郵輪繼續航行 3 公里後，第二次觀測測得燈塔 A 在北 45° 西，燈塔 B 在正北方(見圖(3))。問燈塔 A 與 B 的距離為多少公里？



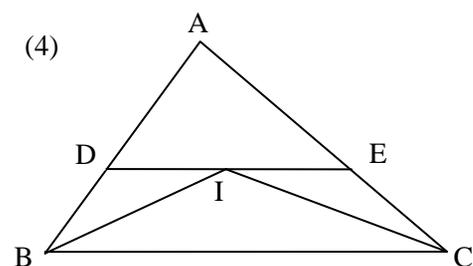
8. 已知一等差數列：4、7、10、13、...、100、103 共 34 項，若從此等差數列中任意挑出 n 個數的話，試問這個 n 最小必須是多少才能保證挑出來的 n 個數中必有二數的和為 107？

9. 已知 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4$ 是一個介於正整數 $m-1$ 與 m 之間的數，則 $m = ?$ (提示：可考慮 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 。)

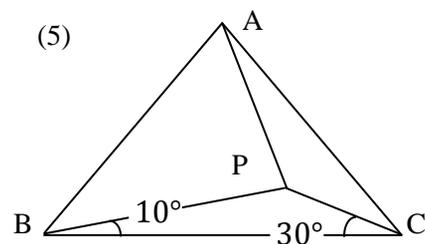
10. 試因式分解 $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$ 。

11. 已知三角形 ABC ， A 點的座標是 $(7,1)$ ， B 點在 x 軸上變動， C 點在直線 $x=y$ 上變動，問三角形 ABC 三邊長的和最小值是多少？

12. 如圖(4)，已知三角形 ABC 三邊長為 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ 。若在 \overline{AB} 上取一點 D 及 \overline{AC} 上取一點 E 使得 \overline{DE} 平行 \overline{BC} ，且三角形 ABC 的內心 I 在 \overline{DE} 上，問 \overline{DE} 的長度是多少？



13. 已知等腰三角形 ABC 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，若點 P 在三角形內部使得 $\angle PBC = 10^\circ$ ， $\angle PCB = 30^\circ$ 且 $\overline{BP} = \overline{BA}$ (見圖(5))，求 $\angle APC = ?$



14. (1) 若 $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$ 且實數 a 、 b 滿足 $a+b=1$ ，則 $f(a)+f(b) = ?$

(2) 求值 $\frac{4^{\frac{1}{103}}}{4^{\frac{1}{103}}+2} + \frac{4^{\frac{2}{103}}}{4^{\frac{2}{103}}+2} + \frac{4^{\frac{3}{103}}}{4^{\frac{3}{103}}+2} + \dots + \frac{4^{\frac{102}{103}}}{4^{\frac{102}{103}}+2} = ?$

二、計算證明題：(每題 10 分，共 60 分)

1. (1) 求值 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{102 \times 103} = ?$ (3%)

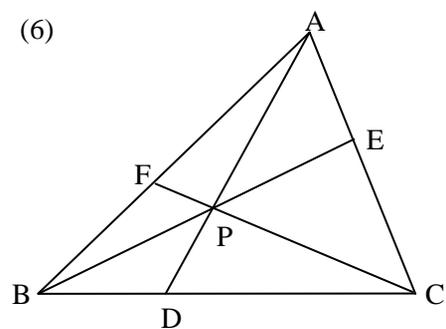
(2) 求值 $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{101 \times 102 \times 103} = ?$ (3%)

(3) 若 $a = \sqrt{104^2 + 104^2 \times 103^2 + 103^2}$ 是一個正整數，試問 $a = ?$ (4%)

2. (1) 已知 a, b, c, d 是實數且 $a \neq 0$ ，若設一次多項式 $f(x) = ax + b$ ，則有關係式 $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0$ 。若設二次多項式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，則有 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0$ 。試猜測若 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為一個三次多項式時會有怎樣的關係式？(4%)
- (2) 已知 $f(x)$ 是一個三次多項式，且 $f(2010) = 2, f(2011) = 0, f(2012) = 1, f(2013) = 4$ ，試問 $f(2014)$ 的值是多少？(6%)

3. (1) 在圖(6)中，已知三角形 ABC 邊上兩點 E, F 滿足 $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3, \overline{AF} : \overline{FB} = 4 : 3$ (圖的比例僅供參考)，現有 P 為三角形 ABC 內部一點。若已知三角形 ABC 的面積為 18 並假設三角形 PBC 、三角形 PCA 、三角形 PAB 的面積分別為 a, b, c ，則 a, b, c 分別等於多少？(各2%，合計6%)

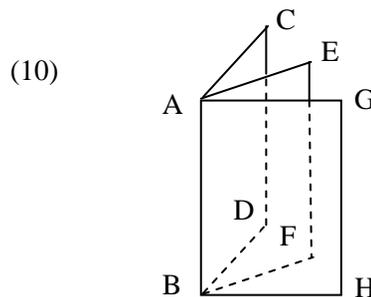
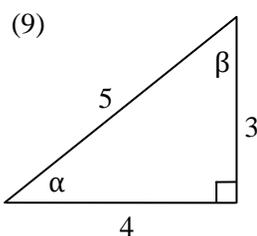
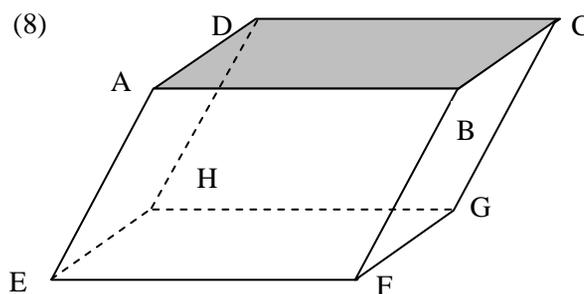
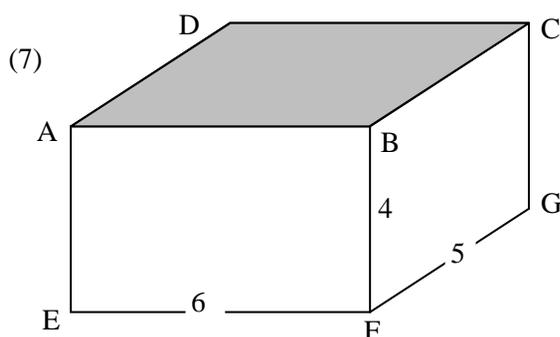
- (2) 已知 P 點滿足 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} = \frac{27}{4}$ ，試求 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} = ?$ (4%)



4. 如圖(7)，現有一個有蓋的空心長方體紙箱，已知 $\overline{EF} = 6, \overline{FG} = 5, \overline{FB} = 4$ 。

- (1) 若有一隻螞蟻欲從紙箱表面的 A 點爬至 G 點，問螞蟻爬行的最短路徑距離為何？(4%)
- (2) 若有一隻蜜蜂欲從紙箱頂部的 A 點飛至 G 點，問蜜蜂飛行的最短路徑距離為何？(3%)
- (3) 若紙箱被壓歪成圖(8)的形狀使得 $\angle AEF = 60^\circ, \angle AEH = \alpha, \angle FEH = \beta$ 且 α, β 是圖(9)的直角三角形的兩內角(注意： $\angle AEH$ 不是直角)。則試問蜜蜂由 A 點飛至 G 點的最短路徑距離為何？(3%)

(提示：如圖(10)，若翻開一冊3頁的小書，書背 \overline{AB} 與書頁的上下緣 $\overline{AC}, \overline{AE}, \overline{AG}, \overline{BD}, \overline{BF}$ 與 \overline{BH} 均互相垂直。)



一、填充題：(每格 4 分，共 60 分)

1. _____ 15 _____

2. _____ 618 _____

3. (9, 5, 4, 6, 3, 2, 1, 7, 8)
或 (9, 5, 4, 6, 3, 2, 7, 1, 8)

4. _____ 17 _____

5. _____ $(1, \frac{5}{2})$ _____

6. _____ 40 _____

7. _____ $\sqrt{6}$ _____

8. _____ 18 _____

9. _____ 98 _____

10. $(b+c)(a+b)(a+c)$

11. _____ 10 _____

12. _____ $\frac{18}{5}$ _____

13. _____ 150° _____

14. (1) _____ 1 _____

14. (2) _____ 51 _____

二、計算證明題：(每題 10 分，共 40 分)

1. (1) $\frac{102}{103}$

(2) $\frac{1313}{5253}$

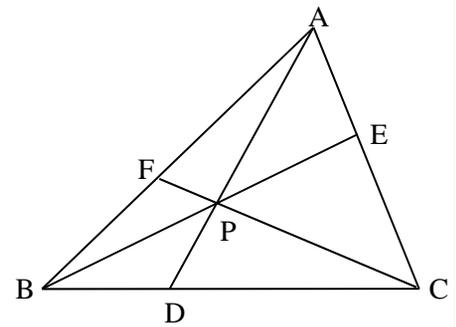
(3) 10713

2. (1) $f(x+4) - 4f(x+3) + 6f(x+2) - 4f(x+1) + f(x) = 0$ 。

(2) $f(2014) = 8$ 。

3. (1) $a = 6$ 、 $b = 8$ 、 $c = 4$

(2) $\frac{35}{4}$



4. (1) $\sqrt{(4+5)^2 + 6^2} = 3\sqrt{13}$ 。

(2) $\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{77}$ 。

(3) $\sqrt{(\sqrt{8})^2 + 7^2} = \sqrt{57}$

