國立台中一中九十五學年度第一次教師甄試數學科試題

一、填充題：請將正確答案填入指定空格內

甲部分：共 4 題，每格 5 分，合計 20 分。

1. 試求 $(\log_9 y)^2+(2^{x+1}+2^{-x+1})\log_9 y+(2^{2x+1}+2^{-2x+1})=0$ 之 y 值= $\underline{9^{-2}}$。

2. 自 1，2，3，4，5，6，7，8，9 九個數中，任取相異四個數排成四位數，若每一數字被取的機會相同，當所取四位數是 99 倍數時，可得相同數目之獎金，設期望值爲 $\dfrac{q}{p}$，p,q 爲互質的正整數，求 $q-p=$ $\underline{1097}$。

3. 求二次曲線 $3x^2+12xy+12y^2+10x+10y-3=0$ 焦點之坐標爲 $\underline{(\dfrac{14}{15},-\dfrac{29}{30})}$。

4. 設方陣 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&5&0\\3&5&-4\end{bmatrix}$ 之乘法反方陣爲 $B=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$，求序組$(a, b, c, d)$= $\underline{(-20, 3, 5, 8)}$。

乙部分：共 5 題，每格 8 分，合計 40 分。

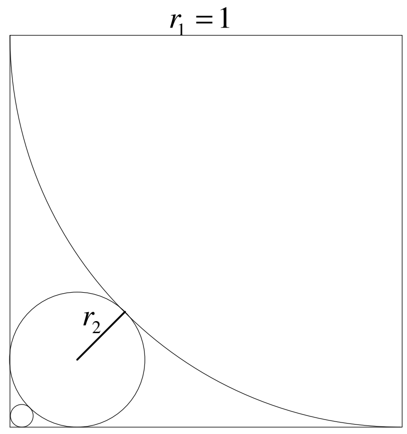
1. 由拋物線 $\Gamma: y=x^2$ 外一點 P 作 Γ 的兩條切線，令兩切線的銳夾角爲 θ，且 $\tan\theta=4$，設所有 P 軌跡所在的方程式爲 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=1$，求 $(a, b, c, d, e)=$ $\underline{(1,0,-16,0,-9)}$。

2. 設 P 爲 ΔABC 的 BC 邊上一點，且 $\overline{PB}=\overline{AC}=a$，若 $\angle BAP=\dfrac{1}{3}\angle PAC=30°$，則 $\overline{PC}=$ $\underline{\sqrt[3]{2}a}$。

3. 在空間坐標系上取原點 O，$A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$，由 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 三向量所張一平行六面體，以此 8 個頂點取不含 O 的四頂點形成一正四面體，設此四面體內切球的球面方程式爲 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$，求序組(a, b, c, d)= $\underline{(-1,-1,-1,\dfrac{2}{3})}$。

4. 已知橢圓：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 過 $P(3\sqrt{3},1)$ 其中 $a>0, b>0$，求 $a+b$ 之最小值= $\underline{\quad 8 \quad}$。

5. 如右圖，一半徑爲 $r_1=1$ 的圓相切於兩條相互垂直的線，半徑爲 r_2 的第二圓又相切於兩條直線及第一個圓，半徑爲 r_3 的第三圓又相切於兩條直線及第二個圓，以此類推，設第 k 個圓半徑爲 r_k，求 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k=$ $\underline{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$。



二、計算證明題：每題 10 分，合計 40 分。請自行標明題號並將詳細過程列出。

1. 某位籃球選手投籃距離與每 50 次中投籃命中的次數如下：

距離(公分)	100	150	200	250	300	350
投中次數	49	47	44	40	35	31

(1)設投籃命中率(Y)對距離(X)的迴歸線爲 $Y=a+bX$ 求序對(a, b)=？(6 分)

(2)並問他下一次在距離 400 公分處投籃 80 次時，預估可投中幾次？(4 分)

2. 若一個直角三角形的三邊長恰好是方程式 $x^3-30x^2+281x-a=0$ 的三個根，其中 a 爲某實數，試求此直角三角形的面積。

3. 設方程式 $x^5-2x^4+x^3+1=0$ 之五根爲 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，設 $a_{ij}=1+x_ix_j$ (若 $i=j$)

$a_{ij}=x_ix_j$ (若 $i\neq j$)，試求 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{vmatrix}$ 之值?

4. 試證明 $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{64}+\cdots+\dfrac{1}{n^3})<1.25$