

(97 下)數學科 甄試試題

一、填充題(每格 4 分)

1. x^{2009} 除以 $(x-1)^2(x^2+1)$ 所得餘式為 _____ (A) _____。
2. 以 O 為圓心的圓上有 n 個相異點, 依序為 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, 此 n 個點將圓分割為 $A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, \dots, A_nOA_1$ 等 n 個扇形區域。在 m 種不同顏色的色筆中任選一種顏色塗其中任一扇形區域, 每區域一色, 相鄰區域不同色, 全部的方法數有 $S(n, m)$, 若 $S(n+2, m) = p \cdot S(n+1, m) + k \cdot S(n, m)$, 求 $p-k =$ _____ (B) _____。
3. 甲乙二人競選三年子班班長, 全班 42 人, 每人一票, 沒有廢票, 逐一唱票, 最後甲以 24:18 當選。問開票過程中, 甲一路領先的機率為何? _____ (C) _____。
4. 直角三角形 $\triangle ABC$ 三邊長 a, b, c , $a \leq b \leq c$, 若 $\log a^2 + \log b^2 = \log c^2$, 則 a 之最大可能值為 _____ (D) _____。
5. P 為橢圓 $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$ 上一點(不為端點), 一魔力光點自 P 向橢圓一焦點 F 射出, 在到達 \overline{PF} 中點 M 時, 會朝橢圓中心 O 折射而去, 求此魔力光點自 P 經 M 到達 O 之最短路徑長 _____ (E) _____。
6. $1^2 C_1^{10} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^9 + 2^2 C_2^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 + 3^2 C_3^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 + \dots + 10^2 C_{10}^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} =$ _____ (F) _____。
7. 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 則 $\frac{2}{\sin \theta} + \frac{3}{\cos \theta}$ 的最小值為 _____ (G) _____。
8. 擲一公正骰子, 直到 6 點出現第 3 次才停止, 設 X 表至停止時所投擲的次數, 求 (1) $P(X=5) =$ _____ (H) _____, (2) $E(X) =$ _____ (I) _____。
9. 方程式 $(x^2 - 3x + 1)^{x+1} = 1$ 有 _____ (J) _____ 個整數解。

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, 若 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, 求 (1) $\delta =$ _____ (K) _____, (2) $I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n + \dots =$ _____ (L) _____,

11. 求過 $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 而與拋物線 $\tau: y = -x^2 + 4x - 3$ 相切的二切線與拋物線 τ 所圍區域的面積為 _____ (M) _____。
12. $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 13$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 若 $f(x) = 0$ 有四個虛根 r_1, r_2, r_3, r_4 , 滿足 $r_1 + r_2 = 1 - i, r_3 r_4 = 2 - 3i$, 則 $2a + b + c + d =$ _____ (N) _____。
13. 設 $A(1, 2, 3), B(2, 3, 4)$ 若 \overline{AB} 在平面 $x - y + z = 1$ 之正射影長為 m , 在直線: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{6}$ 之正射影長為 n , 求 $3m^2 + 7n =$ _____ (O) _____。
14. $\log_{x-2}(2x^3 - 12x^2 + 22x - 11) = 2$ 的解為 _____ (P) _____。
15. 正整數 a, b, c, d 滿足 $a+b=3(c+d), a+c=4(b+d), a+d=5(b+c)$, 求 a 可能的最小值為 _____ (Q) _____。
16. 若 $f(x) = 5 - 6x + x^2$, 求滿足 $f(x) + f(y) \leq 0$ 及 $f(x) - f(y) \geq 0$ 的 $p(x, y)$ 所表區域面積 _____ (R) _____。
17. 設 $z = \cos \alpha + i \sin \alpha, \omega = \cos \beta + i \sin \beta$, 且 $z + \omega = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$, 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 之值為 _____ (S) _____。
18. 求滿足 $(x - 2\cos \theta)^2 + (y - 2\sin \theta)^2 = 9$ 之所有點 $P(x, y)$ 所表區域面積 _____ (T) _____。

二、填充計算題:

1. 求滿足 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$ 之共同部份體積。
2. 求 $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$ 繞 x 軸所得旋轉體 τ 的表面積。
3. 設 A 袋有 2 個 10 元幣, B 袋有 3 個 5 元幣。從 A 袋中任取一個錢幣與 B 袋中任取一個錢幣互換。若這樣的互換進行 3 次, 求 A 袋中錢幣的期望值。
4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2^2} \cos^2 \frac{x}{2^3} \wedge \cos^2 \frac{x}{2^n}$ 。

(97 下)數學科 教師甄試試題 答案卷

一、填充題 (每格 4 分)

(A). $1004(x-1)^2(x+1)+2009(x-1)+1$ Or $1004x^3-1004x^2+1005x-1004$	(B). -1	(C). $\frac{1}{7}$	(D). $\sqrt{2}$
--	------------	-----------------------	--------------------

(E). 5	(F). $\frac{25}{6}$	(G). $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^2$	(H). $\frac{25}{1296}$
-----------	------------------------	---	---------------------------

(I). 18	(J). 4	(K). $-\frac{1}{4}$	(L). $\frac{16}{15} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
------------	-----------	------------------------	--

(M). $\frac{9}{4}$	(N). 9	(O). 19	(P). $\frac{5}{2}$
-----------------------	-----------	------------	-----------------------

(Q). 83	(R). 4π	(S). $\frac{24}{7}$	(T). 25π
------------	----------------	------------------------	-----------------

二、填充計算題:每題 5 分,須有計算過程

1. $\frac{16}{3}$ 。	2. $\frac{224\pi}{3}$ 。
3. $\frac{505}{36}$ 元 。	4. (1)x=0 時, 值為 1。 (2)x≠0 時, 值為 $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ 。
	(2分) (3分)