臺北市立中正高級中學 99 學年度第 1 次專任教師甄試數學科筆試試題卷

一、 填充題（每格 4 分，共計 60 分）。請將答案化簡後，填入答案卷中的指定位置

1、設 $(x,y)=(a,b)$ 為方程式 $3^{33}x+2^{22}y=1$ 的整數解，若 $b>0$，則 $b\div 9$ 的餘數為 ___(1)___　4

2、設 $\left|\log_2 x\right|-x^2=0$ 之根為 α，$\left|\log_3 x\right|-x=0$ 之根為 β，$\left|\log_3 x\right|-x^2=0$ 之根為 γ，則 α,β,γ 的大小順序為 ___(2)___　$\beta<\gamma<\alpha$

3、求點 $P(-3,0,-1)$ 到圖形 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ 的最短距離為 ___(3)___　$\sqrt{21}$

4、已知 α、β 是方程式 $x^2-(k+2)x+(k^2-3k+5)=0$ 的兩個實根，則 $\alpha^2+\beta^2$ 的最大值為 ___(4)___　18

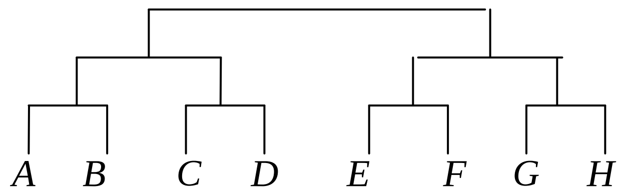
5、9 粒種子分種在 3 個坑內，每坑 3 粒，每粒種子發芽的機率為 0.5 且發芽與否互不影響。若一個坑內至少有 1 粒種子發芽，則這個坑不需要補種；若一個坑內的種子都沒發芽，則這個坑需要補種。假定每個坑至多補種一次，補種 k 個坑所需費用為 $(20k^2+10k)$ 元，則補種費用的期望值為 ___(5)___　105/8

6、若 $z+2i$、$z-2i$ 的主幅角依次為 50°、320° 且 $|z+2i|=|z-2i|=1$，則 $|z|=$ ___(6)___ 送分

7、某校高一共有 20 個班，皆為常態編班，現欲調查全校高一第二次段考數學及格的比例，隨機抽樣 2 個班共 100 人，其中數學及格的有 64 人，則在 95% 的信心水準下，全校高一數學及格比例的信賴區間為 ___(7)___　[0.544,0.736]

8、方程組 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4} \\ -8x+6y-24z=39 \end{cases}$ 的解 (x,y,z) 為 ___(8)___　$(-\frac{6}{13},\frac{9}{26},-\frac{18}{13})$

9、有甲、乙等 8 隊參加足球賽，比賽賽程如右表，採單敗淘汰制。假設這 8 隊的實力相當，試問整個賽程當中，甲隊和乙隊可能遭遇對打的機率為 ___(9)___　1/4



10、設有 3 位男生，8 位女生圍一圓桌而坐，若任 2 位男生之間至少有 2 位女生，則共有 ___(10)___ 種坐法　483840

※背面尚有試題

11、正四面體 $ABCD$ 中，A,B 落在直線 $L_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ 上，C,D 落在直線 $L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{5}$ 上，則正四面體 $ABCD$ 的邊長為 ___(11)___ $\frac{2\sqrt{105}}{15}$

12、在底面半徑為 6 的圓柱內，有兩個半徑也為 6 的球面，其球心距為 13。今有一平面與這兩球面相切，且與圓柱面相交成一橢圓，則這個橢圓的長軸與短軸長之和為 ___(12)___ 25

13、在ΔABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊分別為 a，b，c。若$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的大小成等比數列，且 $b^2-a^2=ac$，則$\angle B$ 的弧度為 ___(13)___ $\frac{2}{7}\pi$

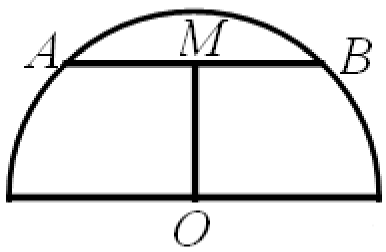
14、已知拋物線$(x+1)^2=2py$ ($p>0$)的焦點 F，A 是拋物線上縱坐標為 4 且在 y 軸左方的點，A 到拋物線準線的距離等於 5，過 A 作 x 軸的垂線，交 x 軸於 B 點，O 為原點，令 M 為$\overline{OB}$ 中點，過 M 作$\overline{AF}$ 的垂線交$\overline{AF}$ 於 N，則 N 點坐標為 ___(14)___ $(-\frac{37}{25},\frac{34}{25})$

15、設$1<x<4$且$x\neq 2$、$x\neq 3$，令 $y=\frac{2}{(x-1)(2-x)}+\frac{2}{(x-2)(3-x)}+\frac{2}{(x-3)(4-x)}$，當 y 有最小整數值時，則其對應的 x 之值為 ___(15)___ $\frac{5\pm\sqrt{3}}{2}$

二、 計算證明題（每題 10 分，共計 40 分）。

請將作答過程寫在答案卷中的指定位置。先標明題號再作答

1、有一題目如下：『有一半徑 20 公尺的半圓形釣蝦場，想在上面蓋一"T"字型的木橋方便釣客垂釣(如圖$\overline{OM}\perp\overline{AB}$)。為使木橋總長$\overline{AB}+\overline{OM}$ 為最大，求此時$\overline{OM}$ 的長度是多少?』



試問：該題在高一，高二，高三出現時，請您使用不同的解法來教導學生，請詳細說明您的解法。 $4\sqrt{5}$

2、坐標平面上，設$A_1(a,0)$、$B_1(0,a)$，$a>0$。(用 a,n 表出以下各題之答案)

（1）求ΔOA_1B_1內切圓之半徑r_1(占 3 分) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$

（2）設ΔOA_1B_1之內心為C_1，過C_1作$\overline{A_2B_2}\,//\,\overline{A_1B_1}$，其中$A_2$在 x 軸上，B_2在 y 軸上，令ΔOA_2B_2之內心為C_2，過C_2作$\overline{A_3B_3}\,//\,\overline{A_2B_2}$，其中$A_3$在 x 軸上，B_3在 y 軸上，如此繼續操作下去，可得$\Delta OA_3B_3,\Delta OA_4B_4,---,\Delta OA_nB_n,---$，求$\Delta OA_nB_n$內切圓之半徑$r_n$(占 4 分)

（3）設S_n表ΔOA_nB_n之內切圓面積，求$\sum_{n=1}^{\infty}S_n$(占 3 分) $(\frac{2\sqrt{2}-1}{14})a^2\pi$

3、已知兩個同心圓，n邊形$A_1A_2\cdots A_n$為內圓的內接正n邊形，點P為外圓上任意一點，

求證：$\overline{PA_1}^2+\overline{PA_2}^2+\overline{PA_3}^2+\cdots+\overline{PA_n}^2$為定值

4、已知橢圓$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{9}=1$與拋物線$y=x^2-m$有四個相異交點，

（1）求實數m的範圍(占 5 分)　$3<m<\dfrac{15}{4}$

（2）求證：此四個交點共圓(占 5 分)