跌跌撞撞的機率

許介彥

大葉大學　電信工程學系

前言

「遞迴」（Recursion）的觀念除了可以用來解決許多類型的計數問題外，在其他許多領域也扮演著重要的角色。在本文中，讀者將看到遞迴在幾個機率問題的應用。

例題

問題一：

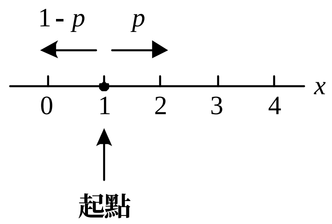
某個醉漢在一個月黑風高的夜裡跌跌撞撞地來到了一個懸崖邊，他只要再向前走一步就會跌落懸崖。如果從現在開始他的每一步不是向前就是向後，而且向前及向後的機率分別是 1/3 與 2/3，那麼他跌落山崖的機率是多少？

解答：

會使得醉漢跌落山崖的走法有無限多種，如向前一步、向後→向前→向前、向後→向前→向後→向前→向前、向後→向後→向前→向前→向前等；所有這種走法所走的步數必定是奇數。

由於醉漢的前進與後退都在一直線上，他的移動可以看成是在數線上左右移動，我們將懸崖的坐標定為 0，醉漢一開始的位置定為 1；一旦他的所在位置為 0 就相當於跌落懸崖。

考慮比原來的問題更具一般性的情況：假設醉漢的每一步向右及向左的機率分別為 p 及 $(1-p)$，而 P_x 代表醉漢一開始的位置為 x 時跌落懸崖的機率；原來題目中的 p 為 2/3，所要求的機率則是 P_1（見下圖）。



讀者不難預測，當 $p=0$ 時 P_1 必等於 1，而當 $p=1$ 時 P_1 必等於 0；當 p 的值由 0 持續增加到 1 時，P_1 的值會由 1 減少到 0；P_1 的值會隨著 p 的改變而起「連續」的變化，也就是說，P_1 應該是一個連續函數。

由於醉漢的第一步在數線上不是向左就是向右，如果向右到達坐標為 2 的點的話，接下來的移動會跌落懸崖的機率為 P_2，因此以下關係成立：

$$P_1 = (1-p) + pP_2$$

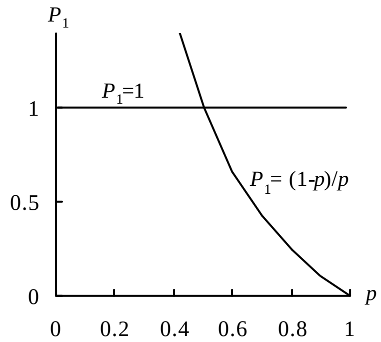
由坐標為 2 的點走到坐標為 0 的點的走法可以分為前後兩段，前段是由坐標為 2 的點走到坐標為 1 的點（發生的機率為 P_1，因為與由坐標為 1 的點走到坐標為 0 的點同樣是向左一個單位），後段則是由坐標為 1 的點走到坐標為 0 的點（發生的機率為 P_1），因此 $P_2 = P_1 \cdot P_1$，上式可改寫為

$$P_1 = (1-p) + pP_1^2$$

將 P_1 當做未知數可解得

$$P_1 = 1 \text{ 或 } P_1 = \frac{1-p}{p}.$$

解出來的兩個根在 $p = 1/2$ 時相等（見下圖）。



由於 P_1 的值不能大於 1，因此顯然 $P_1 = (1-p)/p$ 不適用於 $0 \le p < 1/2$ 的情形，也就是說，當 $0 \le p < 1/2$，P_1 的值必為 1。

另一方面，由於 P_1 是 p 的連續函數且當 $p = 1$ 時 P_1 的值為 0，因此當 $1/2 \le p \le 1$ 時，P_1 的值必等於 $(1-p)/p$。

就我們原來要解決的問題而言，p 的值為 2/3，而

$$P_1 = \frac{1-(2/3)}{(2/3)} = \frac{1}{2}$$

所以醉漢跌落山崖的機率是二分之一。

請讀者留意：上面的論述告訴我們，當 $p = 1/2$，也就是醉漢的每一步向前及向後的機率一樣時，他跌落山崖的機率是百分之百！只有當醉漢的每一步向後的機率被提昇到高於 2/3 時，醉漢跌落山崖的機率才會降到一半以下，這樣的結論可能會與許多讀者的直覺相抵觸。

問題二：

上個問題中，如果醉漢一開始的位置離懸崖邊有 m 步之遙（m 為任意正整數），而且他的每一步向後及向前的機率分別是 p 與 $(1-p)$，那麼他跌落山崖的機率是多少？

解答：

我們不難將上個問題的解答說明中起點為 2 時醉漢跌落山崖的機率 $P_2 = P_1P_1$ 推廣到起點為任意正整數 m 的情形；當 $m > 1$，由坐標為 m 的點走到坐標為 0 的點的走法可以分為前後兩段，前段是由坐標為 m 的點走到坐標為 $(m-1)$ 的點（發生的機率為 P_1），後段則是由坐標為 $(m-1)$ 的點走到坐標為 0 的點（發生的機率為 P_{m-1}），因此 P_m 的值等於 P_1P_{m-1}，而

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1P_1 = P_1^2 \\ P_3 &= P_1P_2 = P_1^3 \\ P_4 &= P_1P_3 = P_1^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

一般而言，$P_m = P_1^m$。我們從上個問題已知

$$P_1 = \begin{cases} 1 & 0 \le p \le 1/2 \\ (1-p)/p & 1/2 \le p \le 1 \end{cases}$$

因此

$$P_m = \begin{cases} 1 & 0 \le p \le 1/2 \\ ((1-p)/p)^m & 1/2 \le p \le 1 \end{cases}$$

由此不難看出當 $p < 1/2$ 時，不管醉漢一開始離崖邊多遠，他跌落山崖的機率都是 1；而當 $p > 1/2$ 時，醉漢一開始離崖邊越遠，他跌落山崖的機率就越小。

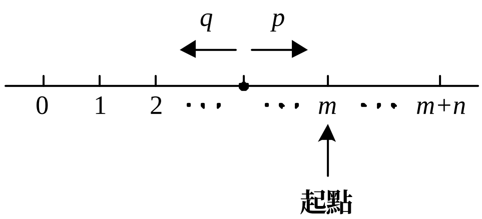
問題三：

M 和 N 都喜歡找對方下棋，他們下的每一局棋由 M 獲勝的機率都是 2/3（N 獲勝的機率為 1/3）。如果 M 與 N 一開始分別有一元及兩元，每下完一局輸的人就付給贏的人一元，而且比賽一直持續到有一方輸光了為

止，那麼 M 將 N 的錢全部贏走的機率是多少？

解答：

考慮一個較具一般性的情況：一開始 M 與 N 分別有 m 與 n 元，每一局 M 獲勝的機率為 p，N 獲勝的機率為 $q=1-p$；M 在比賽過程中的任何時候所擁有的金額可以看成是數線上的一點，一開始 M 的坐標為 m，他的每一步向右及向左的機率分別為 p 與 q，一旦他的位置落在原點就代表他的錢已經輸光了，而一旦他的位置落在坐標為 $(m+n)$ 的點就代表 N 的錢輸光了（見下圖）。



讀者不難看出這個問題其實和醉漢走路的問題有密切的關連；現在相當於有兩個「懸崖」，分別位於坐標為 0 及 $(m+n)$ 之處，只要 M 走到這兩點中的任何一點比賽即結束。

由於本題的 $p=2/3>1/2$，因此如果我們先忽略當 M 到達坐標為 $(m+n)$ 的點時比賽將會結束（也就是假設比賽仍會繼續進行，N 可以有負債）的話，那麼我們由上一題的解答已經知道 M 到達原點的機率為 $(q/p)^m$。

M 由坐標為 m 的點走到原點的過程中可能會經過坐標為 $(m+n)$ 的點（N 將錢輸光），也可能不會經過該點（M 將錢輸光）；如果我們假設 M 由起點走到坐標為 $(m+n)$ 的點的機率為 Q，那麼下面的關係一定成立：

$$(q/p)^m=(1-Q)+Q(q/p)^{m+n}$$

其中的 $(q/p)^{m+n}$ 是由坐標為 $(m+n)$ 的點走到原點的機率。上式中將 Q 當做未知數可解得

$$Q=\frac{1-(q/p)^m}{1-(q/p)^{m+n}}$$

原來題目中的 $p=2/3$，$q=1/3$，$m=1$，$n=2$，代入上式可算出 M 將 N 的錢全部贏走的機率為 4/7；因此儘管一開始 N 的錢較多，M 的贏面卻較大。

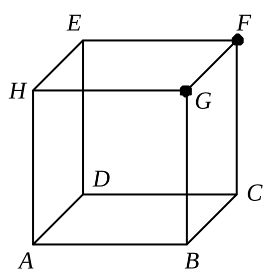
如果 $p=q=1/2$ 會是什麼情形呢？將 p 與 q 的值代入上式的結果將使得分子與分母同時為 0，不過由 l'Hôpital's rule 可知當 (q/p) 趨近 1 時，M 將 N 的錢全部贏走的機率將趨近 $m/(m+n)$，因此當 M 和 N 的棋藝相當時，每個人成為最後贏家的機率正比於比賽一開始各人所擁有的金錢多寡；M 可以期望從比賽中獲利

$$\frac{m}{m+n}(n)+\frac{n}{m+n}(-m)=0$$

元，N 所期望的獲利也同樣是 0 元，因此這將是一場公平的賭局。

問題四：

有一隻蒼蠅沿著立方體 $ABCDEFGH$ 的 12 條邊爬行；每當它到達立方體的一個頂點時它可以選擇與該頂點相連的 3 條邊中的任意一條繼續爬行，每一條邊被選中的機率都是 1/3。



在 F 和 G 兩個點上鋪著捕蠅紙，因此這隻蒼蠅一旦走到 F 或 G 的話將被捕蠅紙黏住而不能再移動。如果蒼蠅一開始的位置為 A，那麼：

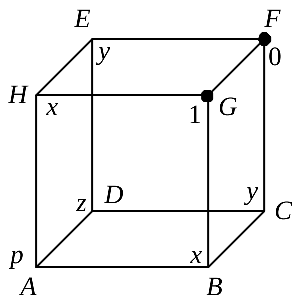
(1)它會在 G 點被黏住的機率是多少？

(2)它會在 F 點被黏住的機率是多少？

(3)它不會被任何捕蠅紙黏住的機率是多少？

解答：

我們先求蒼蠅會被位於 G 點的捕蠅紙黏住的機率。假設蒼蠅由 A 點出發後在 G 點被黏住的機率為 p 且由 H、E、D 點出發後在 G 點被黏住的機率分別為 x、y、z；基於對稱，蒼蠅由 B 與 C 出發後在 G 點被黏住的機率將分別是 x 與 y，如下圖所示：



如果蒼蠅在某個時刻的所在位置為 A 點，那麼它所抵達的下一個頂點是 H、B、D 的機率分別都是 1/3，因此

$$p=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z$$

同理可得

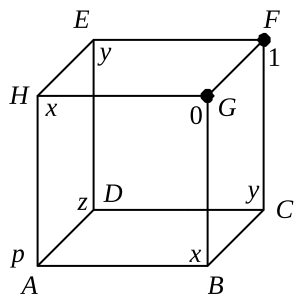
$$x=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}\cdot 1$$

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\cdot 0$$

$$z=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y$$

將以上四個方程式聯立可解得 $p=4/7$（x, y, z 的值則分別是 9/14, 5/14, 3/7）。

接著求蒼蠅會被位於 F 點的捕蠅紙黏住的機率。同樣地，假設蒼蠅由 A 點出發後在 F 點被黏住的機率為 p 且由 H、E、D 點出發後在 F 點被黏住的機率分別為 x、y、z；基於對稱，蒼蠅由 B 與 C 出發後在 F 點被黏住的機率將分別是 x 與 y，如下圖所示：



根據題意列出以下方程式：

$$p=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z$$

$$x=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}\cdot 0$$

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\cdot 1$$

$$z=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y$$

由此可解得 $p=3/7$（x, y, z 的值則分別是 5/14, 9/14, 4/7）。

因此，蒼蠅會在 G 點被黏住的機率為 4/7，會在 F 點被黏住的機率為 3/7，而不會被任何捕蠅紙黏住的機率為

$$1-\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\right)=0\,.$$

問題五：

有一隻螞蟻沿著正四面體 $ABCD$ 的 4 條

邊爬行；每當它到達正四面體的一個頂點時它可以選擇與該頂點相連的 3 條邊中的任意一條繼續爬行，每一條邊被選中的機率都是 1/3。

如果螞蟻一開始的位置為 A 而正四面體的每條邊的長度為 1 呎，那麼當螞蟻爬完 7 呎時，它的所在位置為 A 的機率是多少？

解答：

假設 a_n 代表螞蟻爬了 n 呎後的所在位置為 A 的機率；很顯然 $a_0=1$，我們希望求得 a_7 的值。

如果螞蟻爬了 $(n-1)$ 呎後的所在位置為 A（機率為 a_{n-1}），那麼很顯然當它再爬一呎後的位置不可能為 A。如果螞蟻爬了 $(n-1)$ 呎後的所在位置為 B、C、D 等三點之一（機率為 $(1-a_{n-1})$），那麼當它再爬一呎後的位置為 A 的機率為 1/3。由以上推論，我們有了以下的遞迴關係：

$$a_n=\begin{cases}1 & n=0\\ (1/3)\times(1-a_{n-1}) & n>0\end{cases}$$

由此可陸續算出 a_1, a_2, ..., a_7 的值如下：

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{61}{243}$	$\frac{182}{729}$

因此題目所求的機率為 182/729。讀者如果熟悉常係數線性遞迴關係的求解，不難求得 a_n 的一般式為

$$a_n=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right).$$

參考資料

1. 許介彥（2001），遞迴關係在計數問題的應用，科學教育月刊，第 243 期。
2. Paul Meyer, *Introductory Probability and Statistical Applications*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1970.
3. F. Mosteller, R. E. Rourke, and G. B. Thomas, Jr., *Probability With Statistical Applications*, Addison-Wesley, 1961.

作者信箱：chsu@mail.dyu.edu.tw