数学教学

1996年第5期

目　　录

参加第八届国际数学教育大会的报告——

中国数学教育正在走向世界

华东师范大学数学系　张奠宙

1996年7月14日至21日, 第八届国际数学教育大会(ICME–8)在西班牙的古城塞尔维亚市(Sevilla)举行. 到会的数学教育工作者有来自65个国家的3,500人. 中国大陆有23人参加, 另有10余人来自港、台.

一、中国数学教育学者在历届和本届大会上的表现

国际数学教育大会每四年举行一次, 恰和夏季奥林匹克运动会同年进行. 它的组织者是成立于1908年的"国际数学教育委员会"(ICMI).中国数学会和位于中国台北的数学会作为一个整体, 于1986年正式参加ICMI.

六位大陆的数学教育工作者曾在1980到美国的伯克利参加ICME–4,其中的华罗庚教授在大会上做全体大会的报告,题为"中国的数学普及".1984年的ICME–5, 我国无人到会.以后的ICME–6有7人到会, 1992年的ICME–7增至9人. 这一次猛增到23人, 来自北京(6)、上海(5)、广东(4)、浙江(3)、福建(1)、四川(2)、湖南(1)、山东(1)各地.事先没有组团,我因受国家教委派遣,力所能及地做了一些组织工作.

在前几届的国际数学教育大会上, 除华罗庚先生做过大会报告之外, 没有中国人(包括港台)在大会报告, 或参与大会的组织工作. 这一届有了很大的突破. 在大会程序册上出现的中国大陆学者的名字有:

张奠宙(华东师范大学): ICME–8 的国际程序委员会委员

唐瑞芬(华东师范大学): "教师培训"圆桌讨论会6名主持人之一(全体大会)

王长沛(北京教育学院): 分组演讲:《来自东方的数学教育观》

裘仲沪(中科院系统所): 分组演讲:《中国的奥林匹克数学竞赛》

顾泠沅(上海青浦教院): 分组演讲:《来自青浦县的数学教育实验报告》

叶其孝(北京理工大学): 第17专题组(数学模型和应用)的召集人

以上6人的工作, 使得ICME–8上不断出现中国人的声音. 上述的分组演讲, 引起了广泛的注意. 裘仲沪同志在大会上的演讲, 到会的人数特别多, 他如实地反映了我国开展数学奥林匹克竞赛的成功和不足, 听讲者提问热烈. 王长沛的报告用"科学革命的范式"说明东方的数学教育现象, 具有相当的理论深度. 顾泠沅是我国著名的数学教育专家, 他在青浦县的大面积提高数学成绩的实验, 意义重大. 报告中有大量数据和理论分析, 加之有电视录像片辅助, 使听众对中国数学教育情况有更直观的了解, 引起听众广泛兴趣. 总之, 中国数学教育的历史和现状, 成就和问题, 为世界上更多的同行所了解. 这就是说, ICME–8上中国学者的活动表明:中国数学教育正在走向世界!

二、扬长避短, 从我国实际出发, 多方学习国外经验

中国数学教育取得了许多成功, 而且具有自己特有的长处, 业已引起世人注目, 并正在走向世界. 但是, 我们又确实存在着许多缺陷, 需要向国外同行学习. 在这次会议的前后, 我有机会听到国外人士对我国数学教育的评论. 以

下的各种观点, 值得我们结合我国的国情, 有鉴别地加以吸收.

1. "中国取得数学教育的成绩花费了太高的代价." 对中国数学教育情况十分了解的贝克(J. Becker)教授认为, 中国学生在考试中表现良好, 但忽视创造性能力和应用能力的培养, 缺乏个性发展的导向, 代价似乎太大. 美籍华裔教授项武义说:"中国不要骄傲, 你们学生化在数学上的时间, 是美国学生的好几倍. 取得考试好成绩的同时, 应该问一下, 收益率高不高, 培养效率是否要大幅度提高?"

国际考试的成绩不能完全反映"国民的数学素质", 我们似乎应有这样的清醒认识.

2. "中国数学教育的经验还没有上升为理论". 这些年来, 国外的数学教育口号和理论不断传入我国, 如"大众数学"、"数学问题解决"、"形式化和非形式化"、"计算机辅助数学教学"等都在一定程度上影响我国. 但是, 我国自身的数学教育研究, 至今仍是以"纯经验"的叙述模式为主.

3. "中国数学教育研究的面过窄".这是参加本届大会的中国学者的普遍感受. 西班牙的国际数学教育大会上,共分26个"工作小组(Working Group)和26个专题小组(Topic Group)进行研讨.其中包括"性别与数学"、"构造主义观点下的数学教学"、"民族数学"、"数学知识的形式"、"数学史和数学教学"、"数学模型和数学应用"、"艺术和数学"、"数学教育国际比较"等等,许多课题在我国几乎无人涉及.

另一方面, 国内杂志上的数学教育文章, 绝大部分是"数学解题"研究, 把它们放在上述52个工作小组或专题小组的哪一个都不合适.

4. "中国数学课程和考试题目的类型相当陈旧." 芝加哥大学教授尤什斯金 (Usiskin)很注意研究我国的数学教材. 他对我国注重基础知识学习的作法很欣赏,同时又指出"你们的中小学课程体系还停留在第二次世界大战以前的水平". 确实, 现今的电视天气预报中已有"降水概率"等出现, 经济生活中也频频出现"中奖率"之类的提法, 可是我国的现行九年义务教育数学大纲中, 仍然没有"概率"的地位, 令人遗憾. 其它如微积分,向量, 矩阵等常见的数学观念和方法, 在整个中学阶段都没有列入, 更不要说和计算机时代的数学内容相适应了.

数学习题和考题方面,也是老面孔,相当"八股"化.学生只要记熟那些题型, 就能得高分. 在ICME-8上,许多参加展览的出版物刊登了国外的数学新型题目.我也有意识地收集国外的高考数学试题,感到确有新意.特别是在发展学生的数学创造力和应用能力方面,有许多值得参考.例如,选择题已受到广泛批评,代之而起的是可用计算机改卷的填充题.日本对高考作了大幅度改革,题型变化很大,相形之下,我们过于保守了.

5. 与国外最明显的差距是"计算器和计算机的使用". 本届大会上, 最受欢迎, 听众最多的演讲和展示都有关"高技术在数学教学中的应用". 五花八门的计算机软件, 是许多到会的中学教师的追逐目标. 到会的同志在闲谈时提到, 如果我们只强调用纸笔的基础训练, 忽视计算机和计算器的使用, 也许会和清末时代主张用 "武术功夫"抵挡"洋枪洋炮"那样, 最终必然失败. 这一点, 我们不可掉以轻心.

三、筹备中的两个数学教育国际会议

在这次大会上, 我们还和我国港、台学者, 以及近邻国家, 如日本、韩国、越南、新加坡等朋友接触. 大家不约而同地谈到, 东亚数学教育也许有它自己的规律. 大量的国际数学教育比较研究表明: 东亚诸国的数学教育成绩远较西方国家为优. 日本、香港、新加坡等国家和地区, 在另一个权威的国际教育测试(IEA)中处于第一或第二的位置. 大家也谈到, 凡是受中国传统文化影响的地方, 特别是使用过汉字的国家和地区, 学生的数学成绩一定都好, 无一例外.为了探究其中的原因, 已决定于1998年8月在韩国的汉城举行"ICMI-东亚数学教育地区会议", 共分"考试"、"文化"、"课程"、"教学"、"技术"等五个专题加以深入. 我是这会议的发起人之一, 也是大会的国际程序委员会成员. 在此, 我希望我国对此有兴趣的同志积极

进行研究,彼此多多联系, 并到会参加讨论.

第九届国际数学教育大会, 即ICME-9, 将于2000年在日本东京举行. 我推荐北京教育学院的王长沛教授担任大会的国际程序委员会成员, 现已基本通过. 我衷心希望我国有更多的数学教育工作者参加大会, 包括大, 中, 小学水平的各类学校的数学教师, 数学教育出版社的编辑, 数学教育部门的领导, 科研人员. 可以相信, 在ICME-9上, 通过更多中国学者的活动, 中国数学教育将会进一步走向世界.

在数学教学中加强挫折教育

山东淄博第十八中学　张宇清

挫折教育是培养学生正视挫折, 承受挫折和克服挫折能力的教育, 是关于意志品质的教育, 它是心理教育的一个重要组成部分. 如何对学生进行意志品质的培养, 是当今许多发达国家教育的共同课题. 挫折教育是一种使学生受益终身的教育.

数学的特点之一是高度的抽象性,这给学习数学造成了一定的困难,同时数学知识的系统性又特别强,一环紧扣一环,只要有一环脱节,就难以继续学习下去.这些特点决定了学习数学必须坚持不懈、刻苦努力,同时也决定了数学教学是对学生进行挫折教育的绝好良机.

一、运用数学史料,提高学生对挫折的认识.

1. *数学发展史充满挫折.*

数学是一门基础性的自然科学, 它的诞生和发展, 道路是不平坦的. 这一历史过程, 凝聚了古今中外无数数学家不懈的追求和探索. 从数的产生到无理量的发现, 从解析几何的发明到微积分的问世, 从非欧几何的发现到计算机的产生, 无论是某个概念的建立, 还是某种理论的产生, 每一道难关的攻克, 都是从无数次失败中取得成功的. 可以说, 数学的发展史就是科学家们不断战胜挫折的奋斗史, 没有挫折, 就没有数学的发展.

2. *数学家的奋斗史充满挫折.*

让我们看看大数学家欧拉的历史吧.由于他过度的工作,使他在28岁时就瞎了右眼, 接着, 左眼也视力衰退直到完全失明.不久,住室和他的研究成果又被彼得堡大火付之一炬.打击一个接一个,但他没有倒下. 完全失明后的十七年中, 他凭着惊人的记忆力和顽强无比的毅力, 口述了几十本专著和约400篇论文. 再如希帕索斯之死. 毕达哥拉斯的大弟子希帕索斯首先发现了不可公度线段的存在, 即无理数的客观存在. 这是真理, 然而这一发现却动摇了导师毕达哥拉斯和包括希帕索斯在内的弟子们共同建造的数学王国的基础. 导师要他保密, 并且规定了以死惩戒的纪律. 但是为了真理, 希帕索斯勇敢地把这一伟大的划时代的发现“泄密”了, 他被开除出了毕氏学派, 被抛进了波涛汹涌的大海. 他壮烈牺牲了, 然而无理数的发现给整个数学的发展开辟了一条无限宽广的光明大道. 教师在课堂上对这些作简短的生动的介绍, 使学生真正理解“在科学的道路上从来就没有平坦大道可走, 只有不畏艰险, 勇于攀登的人才有希望到达光辉的顶点”这句话的含义.

教育学生正确地认识挫折,是培养学生初步的辩证唯物主义观点的一个方面.通过数学史的教育,要使学生懂得:在任何时候,任何条件下,前进道路上的挫折总是难以避免的.成功当然是好事,但挫折未必就无益.挫折具有两重性,它既可能产生破坏力,使人一蹶不振,也可以产生再生力,使人从错误和失败中得到教训,变得更坚强、更成熟.正如英国心理学家布朗所说:“一个人如果没有任何阻碍,即将永远保持其满足和平庸的状态.”挫折还可以产生自我张力,即

容忍、谦让, 不因受到挫折灰心丧气,而是变得更冷静,更有耐受力.因此,要教育学生辩证地看待挫折后果,把挫折看成锻炼自己的好机会,就能将挫折变成再生力,坏事就可以变成好事.

二、暴露思维过程, 教给学生战胜挫折的方法.

数学的发展和数学家们走过的道路是充满挫折的, 每一个命题的发现和证明, 常常是凭着数学家的直觉思维, 作出各种猜想, 然后加以证实. 在这个过程中充满了挫折和战胜挫折的方法. 但课本却不能把这些都编写进去, 只能按"定义、公理、定理、例题"的模式编写, 直接了当地给出结果, 而隐去了数学家们曲折的探索、归纳等猜想、发现过程. 如果教师只讲正确的方法, 忽视岐路的剖析, 在课堂上总是一猜就中, 一选就准, 一证就对, 一用就灵, 那学生看到的只能是一个魔术师的表演, 学生一遇到挫折就会束手无策. 因此, 在数学教学中, 教师要重视思维过程的暴露. 一要暴露数学家们的思维过程, 在知识的发生阶段和认识的整理阶段, 让学生参与到概念的形成、数学原理和法则的获取及数学方法的选择过程. 二要暴露教师的思维过程, 对例题和习题的解答, 教师要时时处处暴露真实的思维过程, 努力揭示方法的思考选择过程, 特别是要重视岐路的剖析. 有时教师不妨学学大数学家富克斯的做法, 在课上把自己置于"险境", 开设"即席答题"课, 对学生提出的难题"现想现推", 给学生一个机会, 看看老师最初的解题设想是怎样碰壁的, 更看看遇到挫折后, 教师是怎样调整自己的解题方案, 终于逐步寻找到正确的对策而战胜挫折的, 从而教给学生正视挫折、战胜挫折的方法.

三、创设问题情境, 培养学生的抗挫能力.

伟大的数学家波利亚指出: "困难和问题属于同一概念: 没有困难, 也就没有问题了."因此, 在数学教学中, 教学生解题的同时, 就是在教学生如何通过努力去战胜挫折, 所以波利亚说: "教学生解题是意志的教育······如果学生在学校里没有机会尝尽为求解而奋斗的喜怒哀乐, 那么他的数学教育就在最重要的地方失败了."因此, 教师要注意创设问题情境, 精心设计难度适中的问题, 让各种层次的学生通过解题经受一下挫折的磨练. 所谓"难度适中"就是要从实际出发, 让学生"跳起来能摘到桃子", "跳"需要勇气和毅力, "能摘到桃子"则是让学生经过磨练能体验到成功和愉悦. 题目太难, 容易让学生望而生畏, 题目太易, 不仅不会产生成功后的快乐, 反而会使学生感到"没意思", 也会挫伤积极性. 事实证明, 经过自己奋斗战胜挫折取得的成功才最能激励人、鼓舞人. 挫折教育不是让人们在苦圈里循环, 而是激发学生自强不息、走向成功的信心和决心.

教学实践证明, 在数学教学中对学生进行挫折教育, 是提高学生素质的重要手段. 广大数学教师应该积极探索, 有目的、有计划地在教学中渗透挫折教育, 把数学教学变成增强学生意志品质的实践活动.

参考资料:

1. 《素质教育概论》(黄河出版社. 1993年) 张承芬、刘明主编.

2. 陕西师大《中学数学教学参考》(1993.4.) 《试论数学史的教育价值》, 彭林.

以数学理论指导二项式定理的教学

上海市七宝中学　朱永庆

美国当代著名教育家布鲁纳曾提出"教什么?"、"什么时候教?"、"怎样教?"等问题. 他指示: 在教学中应设计最佳教学程序, 即要求教师要具体了解学习者的认知水平, 已有的经

验, 教材的性质和个别差异等因素, 从而采用最经济, 最有效的教学程序; 其次, 教学必须重视学生的反馈; 再次, 布鲁纳强调发现学习, 认为"学会如何学习"要比"学会什么"更重要. "我们教一门科目, 并不是希望学生成为该科目的一个小图书馆, 而是要他们参与获得知识的过程. 学习是一种过程, 而不是结果."

笔者根据以上教学理论, 设计了一堂关于二项式定理和性质的教学实践课. 先设置一个具体的问题情境: 某城市的街道纵横织成方格网 (如图1) 行人只能在街道上行走, 方向规定朝东或朝南前行, 某同学欲从A处前往B处, 试问有多少种走法?

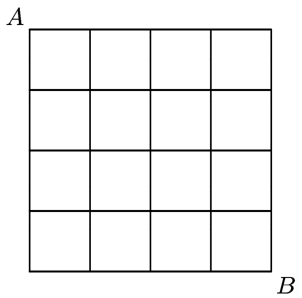


图1

教学展开: (1) 先给出一定时间让学生审题、观察、思考;

(2) 当学生难于独立解决问题时, 教师作适当启发: 如果方格网比较简单时你能给出答案吗?

通过学生的积极思索,班级中出现了两种答案.一种是70,而另一种是C_8^4, 比较两种答案, 不难验证$C_8^4 = 70$.针对不同答案,请学生发表各自的解题策略.作第一种答案的学生根据直觉思维,首先把问题退到最简单的情形, 如图2: 在方格网的交叉点处用数字表示走到这一路口的走法数,从而达到问题解决. 而作另一种答案的学生,较多地运用了思辩和分析,将图中的最小正方形的每一边看作一个小段,显然学生从A到B无论怎么走都必须走完8个小段,其中向东走过4个小段,向南走过4个小段,至于是先向东还是先向南,抑或忽东忽南, 但凭兴之所致.于是问题转化为"从8个不同元素(8个小段)中选出4个(向东的4段)不同元素的组合有多少个?"故知有走法$C_8^4 = 70$种,教师对两种方法作即兴评价,认为第一种方法凭经验和直觉思维,符合从特殊到一般的认知规律,其中不乏归纳及猜想,是创造性思维形成的良好基础;而第二种方法有较大的抽象性,能揭示问题的本质,具有普遍指导意义,两种方法相"印"成"辉".

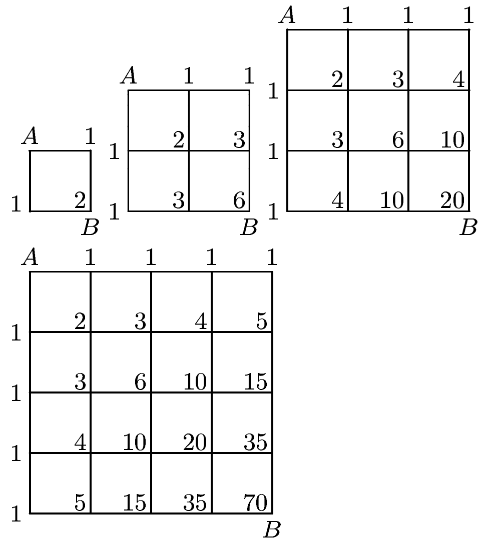


图2

教师在此基础上又引发如下新的问题:"若将方格网绕A点按顺时针方向旋转45°, 观察新的方格网图 (图3).

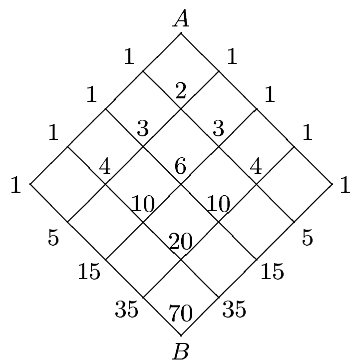


图3

(1) 你能从中发现些什么?

(2) 能否与代数中的二次、三次、四次等二项展开式发生联系?

学生回答: 与杨辉三角形很相似, 事实上是杨辉三角形的局部表示. 利用多项式乘法展开$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,

……

从中不难发现, 将展开式中的系数分离出来即表示成杨辉三角形.

C_0^0

$C_1^0C_1^1$

$C_2^0C_2^1C_2^2$

$C_3^0C_3^1C_3^2C_3^3$

$C_4^0C_4^1C_4^2C_4^3C_4^4$

…………

$C_n^0C_n^1C_n^2\cdots C_n^{n-1}C_n^n$

$C_{n+1}^0C_{n+1}^1C_{n+1}^2\cdots C_{n+1}^nC_{n+1}^{n+1}$

由此猜想发现:$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$, 然后引导学生通过两种不同的思维方式来证明猜想. 一般方法是通过数学归纳法证明的(证明过程略); 另一种方法通过构造组合问题也能加以证明(过程略). 观察杨辉三角形学生还发现 (1) 有对称性: $C_n^k=C_n^{n-k}$; (2) $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$; (3) 若将原问题中的方格网数扩大到一般字母, 放到直角坐标系中, 将问题解析几何化: 点$P(m,n)$是第一象限内的任意格点, 从原点O出发到P点的递增线路有多少条? 答案是C_{m+n}^m或C_{m+n}^n(图4).

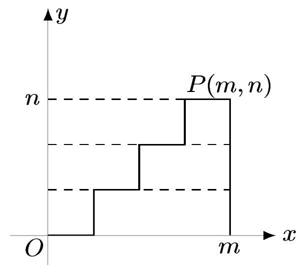


图4

在课外活动中, 为了进一步地培养学生发现与探索能力, 笔者将杨辉三角形进行变形, 可以发现C_0^0, C_1^0, $C_2^0+C_1^1$, $C_3^0+C_2^1$, $C_4^0+C_3^1+C_2^2$, …… 构成的数列恰好是斐波那契数列$\{f_n\}$, 其中定义$f_0=1$, $f_1=1$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ $(n\geqslant 2)$.

对于学有余力的学生, 布置如下课外作业, 给出正整数数列排成下表:

第一行1,

第二行3, 5,

第三行7, 9, 11,

……

第n行$b_1,b_2,b_3\cdots\cdots,b_n$,

(1) 根据你观察所得的特点, 发现你所能探索的结论, 并加以证明;

若每一行的数是杨辉三角形数, 你又能发现些什么?

(3) 若每一行的数换成自然数或正偶数时你又能发现些什么?

例谈数学教学中的开放型设计

浙江杭州师院附中　李学军

当前教材中是以封闭题为主的, 但也存在可以开放的"点"、"块", 下面举例说明编制的思路与方法.

1. 开放型设计的思路

(1) 学生已知的知识让学生通过主体活动去再现.

教学中引入新课时, 需要复习有关的基础知识, 教师的直述并列在黑板上, 那只仅仅是学生主体之外的知识, 而通过开放型设计, 让学生在主体活动基础上再现基础知识则是一种主体的建构的过程.

例如: 在高一讲二次函数时, 考虑到学生在初中已学过, 为此, 设计下面开放型问题:

观察$f(x)=x^2-4x+3$的图象, 看能得

到什么结论?

下面是学生不断思考后逐个得到的结论(为方便说明, 现引入编号)

① 过$(0,3)$点; ② 顶点是$(2,-1)$; ③ $x=2$时, $y_{\min}=-1$; ④ 图象关于$x=2$对称; ⑤ $x=1$或$x=3$时$f(x)=0$; ⑥ $f(x)=(x-1)(x-3)$; ⑦ 当$x<1$或$x>3$时$f(x)>0$, 当$1<x<3$时$f(x)<0$; ⑧ 当$x>2$时$f(x)$为增函数, 等等.

这正是教师需要复习的内容,但通过学生主体活动仍能得出.在此基础上,学生不难将结论推广至一般形式$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的情况.同时,还可由 ④ 得出函数$f(x)$满足$f(2+x)=f(2-x)$这一学生不易发现的结论.

(2) 使知识的建构自然, 全面, 灵活.

一道好的问题有助于学生正确掌握所学的知识, 开放型设计也能围绕这点来进行.

例如: 在讲完映射后, 给出问题:

若$f: A\to B$是映射, $A=\{1,2,3,4\}$, f为"乘2加1"求集合B.

本题结果不唯一, 正是这不唯一, 能使学生自然地, 准确地理解映射概念.

(3) 发挥群体作用.

班级授课制有其通过群体互相交流, 互相促进的长处, 但需要通过教师在教学中去营造, 而制造这一氛围的方法就是引入开放型设计. 下面一例就是利用群体作用而设计的.

在讲三角形中条件恒等式时, 给出问题:

已知$\triangle ABC$你能得到什么结论?

学生通过不断思考, 相互启发, 得出下面结论:

$A+B+C=\pi$,

$A+B=\pi-C$, $\sin(A+B)=\sin C$, $\cos(A+B)=-\cos C$,

$\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$, $\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$, $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$,

$2A+2B=2\pi-2C$, $\sin(2A+2B)=-\sin 2C$, $\cos(2A+2B)=\cos 2C$,

$\cdots\cdots$

同时还得到正弦定理、余弦定理、三角形各种面积公式、射影定理等等.

在此活动基础上, 再去证如$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$类的问题, 学生则易于理解与解决.

(4) 通过问题组织学生"活动".

"建构"观点与"活动"观有着密切联系, 皮亚杰认为: 在学习的基础——活动上, 最基本的学习方法是建构, 学习不应是简单的感知, 被动地接受, 而须学生自身积极能动地构造, 通过连续不断的建构, 得到主体的智力发展. 为组织学生活动, 引入开放型设计是最适宜的. 如在讲完二面角的平面角后设计下面一题:

如图1, 已知$ABCD$是正方形, $PA=PB=PC=PD$.

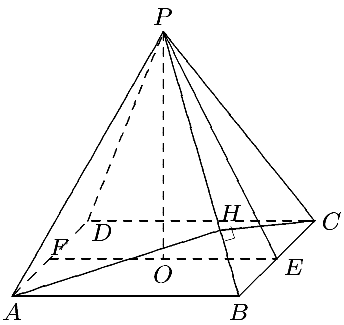


图1

求作① 二面角$P-BC-A$的平面角;

② 二面角$A-PB-C$的平面角.

这里, 通过学生主体活动, 既能覆盖作证二面角平面角的各种方法, 又能防止作二面角的平面角的错误产生.

(5) 由特殊到一般.

从认知发展的过程看, 人们总是先认识具体的或观察所及的事物, 通过经验的归纳获得知识, 然后学习"从概念演绎得出的"新的知识. 让学生认知数学也遵从这一规律, 是符合学生认识规律的. 下面开放型设计正是围绕这一要求提出的.

如在讲: $\sin x+\cos x=A\sin(x+\psi)$前先布置问题:

将$-\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$化为一个角的一个三角函数.

再让学生做一题: $3\sin x-4\cos x$, 则上一题的解法会对解答本题产生影响. 两题做完后, 学生不同的答案对后面推出一般情况:

$a\sin x+b\cos x=A\sin(x+\psi)$, 以及理解$\psi$值的灵活确定是十分有利的.

2. 开放型问题设计的方法

(1) 减少条件, 使问题开放.

如问题: 已知$f(x)=g(x)\sin x$是偶函数, 且$g(x)$是基本初等函数, 求$g(x)$.

又如问题: 已知, 三棱锥$P-ABC$的顶点P在平面ABC内的射影为O, 判定点O在三角形ABC中的位置?

(2) 一题多解, 使解题方法开放.

这种方法在目前教学中已较广泛地应用, 但这里强调的是: 先创设使学生思考的情境, 再去解题.

如: 已知正三棱柱$ABC-A'B'C'$中, $AB'\perp BC'$, 求证: $A'C\perp AB'$.

问题给出后, 不要求学生立即去证, 而是提问:

本题属什么类型?

要证线线垂直只需证什么?

学生考虑后汇总得三条思路:

① 通过证线面垂直(进一步需要作出一个平面);

② 利用线线角定义(进一步需要作出线线角);

③ 应用三垂线定理(进一步需要作出线在面内的射影).

在此基础上再让学生去证明.

(3) 串起问题, 使解题过程开放.

这里"串"是指学生活动的问题在教师导引下不断扩展.

如问题: 在$\triangle ABC$中, 已知$2b=a+c$, 问能得出什么结果?

学生应用正弦定理得到: $\sin A+\sin C=2\sin B$.

问: 还能推出什么?

化积得到: $\cos\left(\dfrac{A-C}{2}\right)=2\cos\left(\dfrac{A+C}{2}\right)$.

继续提问: 学生逐步得到

$\cos A+\cos C=4\sin^2\dfrac{B}{2}$,

$\cos A+2\cos B+\cos C=2$,

$\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=3$, $\cdots\cdots$ 等结论.

(4) 逆向设计, 使解题共性显示出来.

如问题: 已知一个球内切于圆台, 求球的面积与圆台全面积之比.

本题是缺少条件的, 通过引导学生作轴截面得图形, 注上字母(如图2), 并设圆台上下底面半径分别为r, r', 高为h, 母线长为l, 球半径为R. 由图学生发现下列初中已学过的结果:

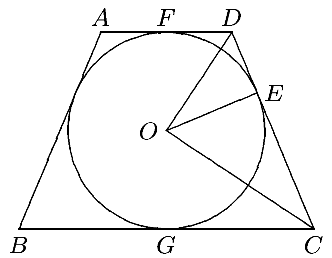


图2

a. $DF=DE$, $CE=CG$;

b. $\triangle DOC$为直角三角形;

c. $OE^2=DE\cdot EC$, 即$R^2=rr'$;

d. $l=r+r'$;

e. $l^2=h^2+(r'-r)^2$; $\cdots\cdots$ 等等.

在此基础上让学生增加条件, 编制问题. 各种各样编制出来的问题再让学生写在黑板上, 他们立刻能发现解法.

又如在讲完集合运算后给出问题:

写出可化成解不等式$\begin{cases}x-2>0\\x+4<0\end{cases}$的问题.

由上所述, 笔者认为:

1. 开放型问题设计作为数学教学的一种形式或数学教学观, 是可以被教师们接受与应用的. 它没排除原有的为广大教师所广泛采用, 符合当前教材评价方式的教学形式, 又有一种创设问题情境的意识和做法.

2. 应用开放型设计, 从面上看课内所解的题偏少(相对于讲授法, 但换一个角度讲, 学生主体思维的时间并没有减少), 从当前的评价体制看, 开放型设计效率是"低"的; 开放型设计, 需要

(下转封底)

重视变式训练, 完善认知结构

上海市奉贤中学 张 曙

现代教育理论认为"数学学习过程就是数学认知结构的形成、变化和完善的过程".

本文从变式训练的侧面, 谈谈如何优化课堂教学, 帮助学生完善认知结构的认识和体会.

一、利用变式训练, 架设认知桥梁, 促进同化过程.

影响同化过程的一个重要因素是新知识与原有认知结构中相应观念间的"潜在距离". 当潜在距离较大时,就需要教师帮助学生在新旧知识间架设"认知桥梁",使新旧知识建立联系.

而变式训练在教学上表现为由浅入深, 逐步展开的特征. 使学生从认知结构中原有的观念上, 随着教学展开, 循序渐进, 由此及彼到新知识上, 达到了缩短"潜在距离"的目的.

例如在学习立体几何中面面平行性质时, 可从判断命题"两直线同时垂直第三条直线, 则两直线平行"的真假出发, 进行变式, 引入课题(图略).

原命题$a\perp c,\ b\perp c \Longrightarrow a/\!/b$(假).

变式一: 将原命题中直线c换成平面γ命题是否正确?

即$a\perp\gamma,\ b\perp\gamma\ \Longrightarrow\ a/\!/b$(真, 线面垂直性质), 它的逆命题是否正确?

即$a/\!/b,\ a\perp\gamma\ \Longrightarrow\ b\perp\gamma$(真、线面垂直判定).

变式二: 将原命题中直线a、b分别换成平面$\alpha,\ \beta$, 命题是否正确?

即$c\perp\alpha,\ c\perp\beta\ \Longrightarrow\ \alpha/\!/\beta$(真、面面平行判定), 它的逆命题是否正确?

即$\alpha/\!/\beta, c\perp\alpha \Longrightarrow c\perp\beta$(课题).

通过上述对图形和条件的变化引伸, 让学生在条件变化时, 观察判断结论的变化, 不仅激发了学生的认知兴趣, 而且揭示了新旧知识的内在联系, 更重要地是突出了新知识(面面平行关系)与原有知识(线面垂直关系)在结构上、特征上的吻合性. 这样做容易激活原认知结构中已有知识和经验与新知识的联系, 使思维具有指向性, 自然地产生知识与方法的正迁移, 达到促进同化过程的目的.

二、利用变式训练, 完成实际情景数学化, 促进顺应过程.

学习一门新知识, 开始都会碰到一系列新的概念和新的思想方法, 这些内容不一定被原有的认知结构所同化. 这时教学上往往通过实例、模型或已有的经验, 从中抽象概括出新概念、新思想, 以顺应新知识的学习.

这种数学概念的抽象性与实际应用的客观性的矛盾, 往往需要用变式来进行衔接. 在教学过程中总是将概念还原到客观实际之中, 撷取部分含有此新概念、新思想的萌芽或雏形的实际现象, 进行引入, 通过变式移植概念的本质属性, 孕育数学思想, 使实际情景数学化, 帮助顺应过程完成.

例如: 立体几何的入门教学中, 常采用教室内诸事物的位置关系或熟悉的桥梁、机械结构等通俗易懂的事例变式, 以及铅笔、书本、三角板、盒、教具等实物的模型变式和图形变式, 来帮助学生完成在已有的平面几何体系和直观经验的基础上, 建立空间概念的顺应过程.

又如: 在学习有理数时, 学生原有零和正有理数的认知结构中没有适当的观念与负有理数相适应, 所以需要在一个学生熟悉的实际情景中来引进负数, 进而引起原有的非负有理数的认知结构的改变, 形成有理数的认知结构.

问题: 搬运100个瓶子, 每个得运费2元, 打碎一个赔3元, 假如某人最后得运费160元, 问途中打碎了几个?

[解] $2(100-x)-3x=160$, 得$x=8$个.

变式1:如果某人最后仅得0元,问途中打碎几个?$x=40$个.

变式2:如果某人打碎了42个,那么他得到的款是多少?

$2(100-42)-3\times 42=116-126=$

$116-126$等于什么? 不知道! 但从题意可知, 他赔10元, 所以可写出等式,

得116元+赔126元=赔10元.

变式3:得15元+赔9元= (　　)(　　) 元,

得12元+赔17元= (　　)(　　) 元,

得$\frac{5}{9}$元+赔$\frac{7}{9}$元= (　　)(　　) 元.

要求学生回答是"得"还是"赔"? 得多少? 赔多少?

变式4:为了简便, 用符号"+"和"−" 分别表示"得"和"赔". 于是得到:

$(+15)+(-9)=+6$,

$(+12)+(-17)=-5$.

变式5:"得"与"赔"是具有相反意义的量,在生活中还能遇到哪些具有相反意义的量?试设计一些具有相反意义的量的加法实际例子.

通过以上变式教学, 使学生在一个与实际生活非常贴近的情境中解决问题. 不仅深深体会到设置负数在解决实际问题中的作用, 也领悟了前人引进负数的指导思想, 更为重要的是顺应了学生的从具体到抽象的认知顺序, 有利于顺应过程的完成.

三、利用变式训练, 提高思维能力, 完善认知结构.

数学认知结构是数学知识结构与思维结构相互作用的结果.

例如集中思维和发散思维是思维结构中求同和求异的两种形式. 在思维过程中互为前提, 彼此沟通, 互相促进. 集中思维的结果, 使学生对知识的理解更加深刻和系统, 使学生的认知结构趋向稳定和加强. 发散思维的结果, 对学生在推广原问题, 引伸旧知识, 发现新问题、新方法上具有积极的开拓作用, 使学生的认知结构在吸收新知识、容纳新思想的基础上得到更新和发展. 所以思维结构在认知结构的完善和发展中起到重要作用.

在解题教学中, 我们经常采用一题多变, 一题多解, 多题一解, 及"开放型"探索性问题的变式训练.

那么, 这些变式训练, 对完善知识结构、思维结构、乃至于认知结构, 有那些积极作用呢?

从思维理论上看, 一题多变是命题和解题方法的同时发散; 一题多解是命题角度的集中, 解法角度的发散; 多题一解是命题角度的发散, 解法角度的集中. 所以变式训练有利于各种思维方式的互相渗透和互相影响, 进而辩证地联系在一起, 促进思维结构的完善.

所以变式训练既使知识发展有良好的载体, 又使思维训练有合适的工具. 有利于知识结构与思维结构相互作用. 促进认知结构的完善和发展.

现举有关变式训练的几个实例:

1. 一题多变:

[例1] 已知二次函数$y=3(x-2)^2+1$, 试求它在以下各定义域上的最大值与最小值. ① $[1,4]$, ② $[3,4]$, ③ $[-1,1]$, ④ $[t,t+1]$.

变式① 已知x^2+x是非正实数, 求$f(x)=2^{x+2}-3\cdot 4^x$的最值.

② 已知$2\leqslant x\leqslant 4$, 求$f(x)=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2+5$的最值.

③ 已知$\sin x+\sin y=\frac{1}{3}$, 求$V(x)=\sin x-\cos^2 y$的最值.

通过以上最值问题的变式可从题目的结构上和思路上进行抽象、概括和归纳, 以便形成更完善的知识结构和思维模式. 有利于形成有序的系统的认知结构.

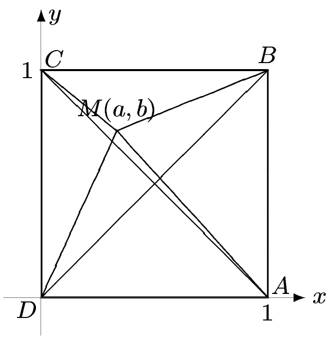
2. 一题多解.

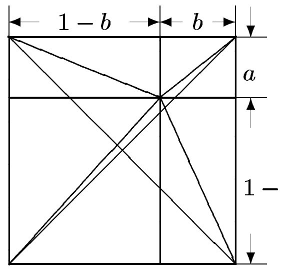
[例2] 设$0<a<1$, $0<b<1$, 求证$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.

〈分析一〉类比思维: 类比基本不等式变形$\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$用于不等式的左端, 即可.

〈分析二〉数形转换: 不等式左端各项看

作距离公式, 由此构造正方形, 如图, 用解几方法证明.





〈分析三〉归纳思维: 由$2\sqrt{2}$想到单位正方形两对角线长之和, 构造如图正方形, 用平几方法证明.

〈分析四〉直觉思维: 仔细观察条件$0<a<1$、$0<b<1$产生"顿悟", 是三角函数值域, 从而用三角代换$a=\sin^2\alpha$, $b=\cos^2\beta$, 再利用$\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$来解决.

〈分析五〉发散思维: $\sqrt{a^2+b^2}$可看作不等式$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$的左端(证一)、两点间的距离(证二),矩形对角线长(证三), 还可看作什么呢?可看作复数$a+bi$的模,于是可构造复数,再利用不等式$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$解决.

从以上解题中看出:由于学生原认知结构的差异,所以对题目的信息加工处理过程呈现出多样性,使问题能在不同的知识背景下得到一题多解, 这样做, 使基础知识融会贯通的同时,各种思维形式不断转换,在动态中强化思维训练,通过问题解决后的比较、反思、总结,能不断提高思维的概括水平,丰富和完善思维结构.

3. "开放型"探索性问题

[例3] P、Q为椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$上两点, 若$OP\perp OQ$, 求证: $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.

这是一道"封闭型"题目, 把这题变式, 就成为"开放型"探索性问题. 例如:

变式一: 试用多种方法证明.

(方法探索性问题)

变式二: 设直线$Ax+By=1$交椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$于P、Q两点($A^2a^2+B^2b^2-1>0$), 问a、b、A、B应满足怎样条件? 使得$OP\perp OQ$.

(条件探索性问题)

答案: $a^2+b^2=a^2b^2(A^2+B^2)$.

变式三: 设PQ是椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$的任一弦, 若$OP\perp OQ$, 问弦PQ具有哪些性质?

(结论探索性问题)

答案: ① 椭圆中心到弦PQ的距离d为定值$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

② 弦PQ恒与定圆$x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$相切.

开放型题和封闭型题在教学中应该并存, 按照皮亚杰认识论的观点, 封闭型题主要引起同化, 而开放型题则引起顺应. "在认知过程中, 同化说明成长, 一种量的变化, 而顺应说明发展, 一种质的变化. 这两种心理过程结合在一起进行很多次循环, 乃是智慧的适应和解决问题能量发展的原因."

重视变式训练, 发展认知结构, 必须正确运用各种层次的变式训练, 在学生积极参与的过程中, 促进同化和顺应, 发展认知结构, 完善思维结构.

变式训练必须要有针对性, 充分展示思维过程, 暴露学生在探索解题方法过程中的问题和弱点, 使"反馈"出一些带有倾向性和实质性的问题, 针对各种不同层次学生存在的问题, 改进教学. 让学生的知识结构和思维结构协调, 融为一体, 相互作用, 有效地发展认知策略, 促进学生认知结构的完善和发展.

重视估算能力的培养

陕西商州中学　丁志勇

估算是指凭直觉估计、合理猜测解题途径乃至答案的一种合情推理. 形式上它不象逻辑推理那样严谨周密 (其思维带有跳跃性、浓缩性), 但却常常能得到和逻辑推理同样的结论, 因为估算的过程中, 进行了一系列的观察、尝试、设想、类比、印证等合情推理. 解题活动中, 它既是解题方案的制定者(为解题探路、定向), 又是解题的直接参与者, 还是解题过程的监控者(监控解题过程的合理, 判断结论的正确与否), 因而估算不仅能为解题指向、扬帆, 而且还能为解题送行、护航.

例1　化简 $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$ 的结果为 ……………………(　)

(A) $\dfrac{2a}{(a-b)(b-c)}$; (B) $\dfrac{2c}{(b-a)(b-c)}$;

(C) $\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$; (D) 0.

分析　因原式是a、b、c的对称式, 故化简结果也应是对称的, 但(A)、(B)、(C)都不是对称式, 因而, 估算推测出(D)正确.

评注: 客观性命题的独特结构, 给估算创造了有利条件.

例2　在$\triangle ABC$中, 若$c^n=a^n+b^n$ $(n>2)$, 问$\triangle ABC$为何三角形?

分析　显然当$n=2$时, $c^2=a^2+b^2$, $\triangle ABC$为直角三角形, 当$n>2$时, 我们可以从特殊出发进行合理的估测, 取$n=3$, $a=1$, $b=2$, 算得$c=\sqrt[3]{9}\approx 2.08$, 作这个三角形的草图, 得到一个锐角三角形, 再观察其它特例, 还是锐角三角形, 由此完全有理由估计, 满足条件的三角形是锐角三角形. 目标明确了, 思路自然就形成了.

证明: 在$\triangle ABC$中, $\because c^n=a^n+b^n$ $(n>2)$, $\therefore c$为最大边. 为此只需要证$\angle C$是锐角即可, 而$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, 问题转化为证: $a^2+b^2>c^2$, 该式等价于$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$, 即: $(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n>0$.

把已知等式代入上式的左边得:

$(a^2+b^2)c^{n-2}-a^n-b^n=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})>0$.

从而当$\cos C>0$, $\angle C$为锐角, $\triangle ABC$为锐角三角形.

例3　解方程$8x^3-6x-1=0$.

分析　因为没有现成的解一元三次方程的求根公式, 也无法分解因式, 故先对x进行估算.

当$x\geqslant 1$时, $8x^3-6x=2x(4x^2-3)>1$, 即$8x^3-6x-1>0$.

当$x\leqslant -1$时, $4x^2-3>1$, 从而$8x^3-6x=2x(4x^2-3)<-2$, 即$8x^3-6x-1<-3<0$. 故$-1<x<1$.

观察根的范围和原方程的结构, 联想余弦函数的三倍角公式, 就自然想到了三角换元.

解: 设$x=\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$, 代入原方程得: $8\cos^3\theta-6\cos\theta-1=0$.

$\because 4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta$, $\therefore 2\cos 3\theta-1=0$.

解得$\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}$, 由$0<\theta<\pi$知:

$\theta=\dfrac{\pi}{9}$、$\dfrac{5\pi}{9}$、$\dfrac{7\pi}{9}$.

$\therefore$解为$x_1=\cos\dfrac{\pi}{9}$, $x_2=\cos\dfrac{5\pi}{9}$, $x_3=\cos\dfrac{7\pi}{9}$.

评注: 通过估算尽管没有确定x的解, 但有效地缩小了解的范围, 从而为解题提供了换元的条件, 指明了解题的方向.

例4 用“$\epsilon-N$”语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{2n+1}=1$.

证 采用分析法, 即若ϵ是任意小的正数, 假设不等式$\left|\dfrac{2n}{2n+1}-1\right|<\epsilon$成立, 追索其成立的条件, $\dfrac{1}{2n+1}<\epsilon$, 即: $n>\dfrac{1-\epsilon}{2\epsilon}$, 令$N=\left[\dfrac{1-\epsilon}{2\epsilon}\right]$, 则当$n>N$时, 就有$\left|\dfrac{2n}{2n+1}-1\right|<\epsilon$成立, 故 $\lim\limits_{n\to\alpha}\dfrac{2n}{2n+1}=1$.

这个证明过程中隐含着估算的智慧, $\dfrac{1-\epsilon}{2\epsilon}$是不是正数, 是, N就能找到, 问题得到证明; 不是, 说明N没有找对或根本找不到, 则需检查解题过程或考察原题是否完备.

此题还可以通过估算, 适当放缩, 建立一个比原式更简便的式子证明, 例如: $\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}$. 只要$\dfrac{1}{n}<\epsilon$, 则$\dfrac{1}{2n+1}<\epsilon$, 也就是说$\dfrac{1}{n}<\epsilon$是$\dfrac{1}{2n+1}<\epsilon$的充分条件, 故可以用$\dfrac{1}{n}<\epsilon$求$n$和确定$N$, 这样就简化了不等式的结构, 避免了繁琐的运算.

值得一提的是, 随着社会的进步, 经济迅速发展, 各种信息蜂涌而来, 要在众多信息中捕捉有用信息, 必须具备估算的素质. 所以, 进行估算训练不仅仅是为了解题, 更重要的是为了培养学生的估算意识, 提高他们的素质.

一道有关债券的题目测试新见

江苏锡山市厚桥中学 周为民

加强数学知识的应用, 是80年代以来国际数学教育改革的一个重要趋势, 我国的教育也正在适应这一潮流. 如在九年制义务教育数学教学大纲中, 充实了实用性较强的知识, 强调培养学生运用知识解决简单实际问题的能力. 去年, 全国高考试题中也出现了应用性试题. 但现在中学生运用数学知识、方法解决实际问题的能力究竟怎样? 带着这个问题, 我在我市的一所普通中学高中的两个班级作了测试调查.

测试题:某债券市场发行两种债券,A种面值为100元,一年到期本息和为114元. B种面值也为100元, 但买入价为88元,一年到期本息和为100元.试分析那种债券收益大一些?

测试结果如下:

表1:

结果	A			B		不会做	总计
	仅写答案	错误	正确	仅写答案	错误		
甲班(人)	10	9	9	12	10	4	54
乙班(人)	14	7	8	12	8	3	52

从中反映出如下问题:

(1) 学生的问题解决能力较差. 学生能正确解这个问题的, 甲班仅9人占16.7%, 乙班仅8人占15.4%. 许多学生面对这个问题束手无策. 仅写结果的与不会做的, 甲班共有24人占44.4%, 乙班共有29人占55.8%. 这是因为现在的学生习惯于做书本上的练习题和复习题, 而面对从没遇到过的问题, 尤其是一个实际问题, 就不知所措. 假如把这个实际问题改成比较A、B两者增长率的大小的习题后给学生做, 大多数同学都能解决它的.

(2) 学生对实际问题缺乏正确的数学思考方法.学生错误情况有以下几种.(以甲班为例):

[错误分析1] A种: $114-100=14$, B种: $100-88=12$, $\because 14>12$, $\therefore$ A收益好. 类似的有, A种: $\dfrac{114-100}{12}\approx 1.17$, B种: $\dfrac{100-88}{12}=1$. $\because 1.17>1$, $\therefore$ A收益好. 这样的学生有8个, 占14.8%.

[错误分析2] ∵A种: $\frac{100}{114} \approx 0.877$, B种: $\frac{88}{100} = 0.88$, ∵ $0.877 < 0.88$, ∴B收益好. 这样的同学有5个, 占9.3%, 还有6个学生的分析不知其所以然. 产生错误的原因是由于对债券这种日常经济事物不够了解, 以致不能正确地把收益的大小转化为数学上的数据的比较.

为了进一步了解, 我仅在甲班对测试题进行了简单分析. 两星期后, 再对这两个班级进行第二次测试, 把原测试题中的A种一年到期本息和改为112元, 问那种收益好?

测试结果如下:

表2:

结果	A		B			A与B	不会	总计
	仅写答案	错误	仅写答案	错误	正确	等效	做	
甲班(人)	1	5	3	0	41	1	1	52
乙班(人)	5	2	24	1	13	5	2	52

由此反映出, 通过讲解, 使甲班学生对债券有所了解后, 甲班能正确分析此题的人为41人占78.8%, 乙班仅为13人占25%, 差异显著.

学生的情况是这样, 那么成年人如何呢? 我又用原测试题对成年人作了一次调查, 被调查的人数为20人, 其中有工人、教师(非数学教师)、医务人员; 年龄在25岁~45岁之间; 文化水平居平均水平之上. 测试结果如下:

表3:

结果	A			B		不会	总计
	仅写答案	错误	正确	仅写答案	错误	做	
成人	6	1	2	10	1	0	20

这个结果大出我的意料之外, 我原以为成年人有处理日常经济生活的经验, 但事实上, 仅有两人有较圆满的答复, 有11人是判断错误. 这情况令我们搞数学教学的人值得深思. 当学生从学校毕业后, 在社会日常经济生活中有多少人能用数学去处理一些问题? 不能用的原因是否和在学校学习时, 不重视数学应用于实际的教学有关? 我国学生的数学测试成绩列世界各国首位, 而科学成绩处中下水平, 这既反映了我国教育的优势, 也反映出存在的问题. 因此弥补这种不平衡, 应是我们数学教育工作者的迫切的任务之一.

在"三角比"的教学中注意对学生逆向思维的培养

上海市北虹中学　王仲行

1995年秋季开始, 上海市高一年级普遍采用了课程改革后的新教材, 数学新编教材注意结合数学知识的教学, 渗透了各种数学思想方法, 在培养学生的思维能力方面是很有特色的.

如在进行新教材第六章三角比的教学时, 应针对这章公式较多,思路较广的特点,笔者从以下几个方面注意了对学生逆向思维的培养.

(1) 通过课本实例, 培养逆向思维.

新教材在讲述$2k\pi+\alpha$的诱导公式时,改变了传统教材中长期沿用的顺用公式的解题思路,例如求$\cos(-685°32')$的值,传统教材解法是将$-685°32' = -2\times 360° + 34°28'$,然后用诱导公式简化求值,但学生在改写$-685°32'$为上述形式时往往容易出错,特别是这种负角问题.新教材在解这种问题是显示了灵活性, 对于正角就直接顺用公式,例如$\sin 1470° = \sin(4\times 360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$;对于负角,则改为逆用公式;例如$\cos(-685°32') = \cos(-685°32' + 2\times 360°) = \cos 34°28' = 0.8245$.看似解答过程只作了细小的改变,一点不引人注目,而实质是解题思路的改变.采用逆向使用公式的解法,从而大大降低了求负角三角比的错误率.让学生自己动手对负角求三角比, 分别采用顺用和逆用诱导公式,以培养他们逆向思考意识.

(2) 通过课本练习, 培养逆向思维.

这一章公式较多, 在公式的使用上, 我们

不仅要引导学生顺记、顺用公式, 还要注意要求学生逆记、逆用公式, 可通过课本练习进行训练, 例如在学习同角三角比八个基本关系式后, 让学生做

① 化简 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$. ② 已知 $\operatorname{tg}\alpha=3$, 求 $\dfrac{1}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$ 的值等题来强化对1的逆用公式: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

在学习万能公式后, 可练习求值 $\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ$, 来强化万能公式的逆用, 此类训练问题教材中随手可得, 关键在于教师应有目的地引导, 从而使学生对三角公式在正反两方面上运用自如.

(3) 通过补充实例, 培养逆向思维.

我们知道, 解题思路通常遵循"正难则反"的原则, 即顺推不行时, 考虑逆推; 直接证明不行时, 考虑间接证明; 探求可能性发生困难时, 考虑探求不可能性. 在学习了两角和与差的正弦公式后, 笔者使用以下两例进行训练.

例1 在$\triangle ABC$中,若$\sin C=\cos A+\cos B$, 则角A, B中必定有一个是直角.

分析: 本题若从已知式直接去推是能最后得出结论的, 但推导过程较繁, 故逆向考虑, 使用反证的方法.

证明: 在$\triangle ABC$中, $C=180^\circ-(A+B)$, $\therefore$ 已知式即

$$\sin(A+B)=\cos A+\cos B \qquad (1)$$

即

$$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\cos A+\cos B;$$

$$\cos A(1-\sin B)+\cos B(1-\sin A)=0.$$

假设角A, B都不是直角, 则$1-\sin B\neq 0$, $1-\sin A\neq 0$, $\cos A\neq 0$, $\cos B\neq 0$.

上式即 $\dfrac{\cos A}{1-\sin A}+\dfrac{\cos B}{1-\sin B}=0$, 分别用$1+\sin A$和$1+\sin B$乘分子、分母, 可得 $\dfrac{1+\sin A}{\cos A}+\dfrac{1+\sin B}{\cos B}=0$, 去分母得 $\sin(A+B)+\cos A+\cos B=0$ (2). 比较(1)和(2), 得$\sin(A+B)=0$, 这与$0<A+B<180^\circ$的事实矛盾.

$\therefore$ A、B中必有一个角是直角.

例2 如图1,AB是半圆的直径,$AC\perp AB$, $BD\perp AB$, 且$AC=\dfrac{1}{2}AB$, $BD=\dfrac{3}{2}AB$, P是半圆上任一点, 若AB长为$2a$, 求封闭图形$ABDPC$面积的最大值.

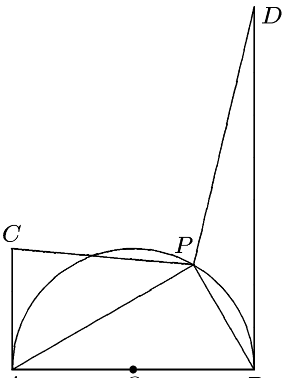


图1

按常规思路直接考虑, 可设$\angle ABP=\theta$, 然后将S表示为$S_{\triangle APC}+S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BDP}$, 最后可求出当$\theta=\dfrac{\pi}{8}$时, S有最大值$(2+\sqrt{2})a^2$. 求解过程中要用到诱导公式, 面积公式, 二倍角公式的正逆方向使用, 逆用两角和的正弦公式等, 考查到的知识可谓不少, 应该讲这是一个比较好的题目. 但这个题目如果我们采用逆向思考的话, 最后结果的求得则相当容易.

思路为: 连结CD, 则$ABDCA$的面积是定值, 要求封闭图形$ABDPC$面积的最大值, 只要求出$S_{\triangle DCP}$的最小值即可, 由于CD是定值, 因此只要求出P到CD的最小距离即可(如图2). 连结OC, 由条件易知$\angle ACD=135^\circ$, $\angle ACO=45^\circ$, $\therefore OC\perp CD$, $\therefore OC$与半圆交

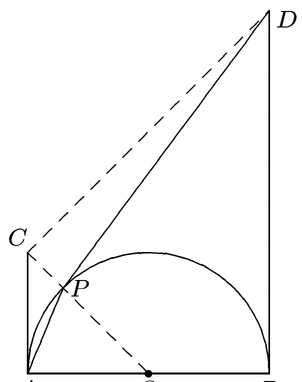


图2

点P是半圆上到CD距离最近的点, 由$OC=\sqrt{2}a$, $PC=(\sqrt{2}-1)a$, $\therefore S_{\triangle PDC}$的最小值为$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}a\cdot(\sqrt{2}-1)a=(2-\sqrt{2})a^2$,

由$S_{梯形ABDC}-S_{\triangle PDC}=\frac{(a+3a)\cdot 2a}{2}-(2-\sqrt{2})a^2=(2+\sqrt{2})a^2$, 即封闭图形$ABDPC$面积的最大值是$(2+\sqrt{2})a^2$.

(4) 通过补充练习, 培养逆向思维.

三角比的变换比代数式的变换内容要丰富得多, 它可以是三角比名称的变换也可以是三角比式中的角的变换. 例如$(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)=2\alpha$, $(\alpha+\beta)+\beta=\alpha+2\beta$, $\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$等, 反之更可使我们看到一个角的表示形式的多样化, 可使思路大大开阔. 这方面可以以题组形式训练学生.

例如: 1. 化简$\cos(\alpha-30^\circ)\cdot\cos 30^\circ-\sin(\alpha-30^\circ)\cdot\sin 30^\circ$.

2. 已知α是大于30°的锐角, $\cos(\alpha-30^\circ)=\frac{15}{17}$, 求$\cos\alpha$.

3. 已知$\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$, $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$, 求$\sin 2\alpha$值.

以上就是我在使用上海新编数学教材, 在关于三角比一章教学中培养学生逆向思维的一些做法.

对《立体几何》课本中一道例题的认识

陕西省商州中学　党效文

课本中有些例题, 看似很平常、一般, 实则不然. 那么怎样才能提高课本例题的典型示范作用呢, 这就需要教者充分挖掘课本例题的内涵, 使例题的作用得以展示. 下面举一例谈一点笔者的认识和体会:

题目: 如图1, 山坡的倾斜度(坡面与水平面所成二面角的度数)是60°, 山坡上有一条直道CD, 它和坡脚的水平线AB的夹角是30°, 沿这条路上山, 行走100米后升高多少米? (立体几何高级中学课本全一册P39例题)

解: 略

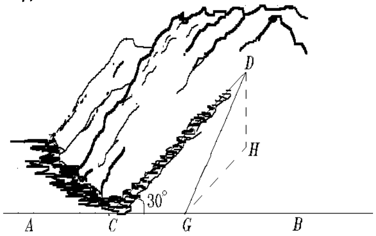


图1

此例是一个实际应用问题, 难度较低, 一般不易引起人们的注意. 但笔者认为颇有思考价值, 表现为以下几点:

1. 建模过程

此例的求解首先要对实际图形(图1)作出想象理解, 然后教学中应抽象出数学模型(图2). 虽建模过程难度较低, 但教学中应主要是向学生渗透建模的思想和增强学生对立体几何中一些基本图形的认识与理解;

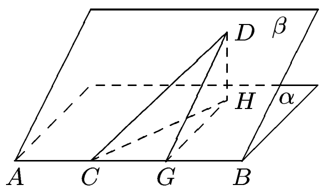


图2

2. 提炼问题

此例的求解是应用三垂线定理作二面角的平面角的典型例子, 也是立体几何的一个基本方法. 为了强化此法, 应在本节练习中配套出相应的题目. 这表明在教学中加强对基本方法

的提炼、理解，是很有必要的，也是加强通法教学的具体表现.

3. 导出等式

在图2中，不妨从一般性出发，记$\angle DCH=\theta_1$，$\angle DCG=\theta_2$，$\angle HCG=\theta_3$，$\angle DGH=\theta$，引导学生从例题图形中推导出等式① $\sin\theta_1=\sin\theta_2\sin\theta$，② $\cos\theta_2=\cos\theta_1\cos\theta_3$，这样的练习既锻炼了学生的动手能力，还揭示了例题的引伸功能.

4. 挖掘引伸

教师在学生导出等式①、②后，把课堂教学进一步引向深入，对等式①、②作出说明与解释. 由等式①可得$\sin\theta_1\leqslant\sin\theta$，即$\theta_1\leqslant\theta$，说明沿山坡直道$CD$上山时与水平面所成的角$\theta_1$不大于山坡的倾斜度，这使例题的实际性增强，又使学生在教学过程中对数学知识与实际生活进行比较、联系、评价，突出了数学应用的广泛性，进一步强化了学生的应用意识，从而有利于学生数学素养的提高. 等式②是立几课本总复习参考题，其应用是很广泛的，本节只为以后的教学作出了铺垫、渗透.

5. 一点建议

每年高考之后,都会出现有心之人将高考题与课本例题作一番对照,发现其类似之处,以呼吁大家对课本的重视,这实际上是一种无奈的作法.要从根本上纠正人们对课本的一些偏见,只有发挥课本的功能.因此笔者建议在随后实施的高中数学新教材中,对例题蕴含的数学思想和基本方法能作出评价,使例题作用明显化、具体化和理论化，促使教师、学生回归课本.

割线斜率公式和它的应用

贵州毕节一中　杜世豪

圆锥曲线与割线的关系是高中数学的重要内容，也是高考热点. 注意挖掘圆锥曲线一类割线的性质，以求快速简捷地求解有关圆锥曲线问题，是很有用处的事. 先请看下述问题的求解过程:

(1994年陕西宝鸡市高三检测题) 若椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$的弦被点$(4,2)$平分，那么这条弦所在的直线方程是……………………………( )

(A) $x-2y=0$;　(B) $x+2y-4=0$;

(C) $2x+3y-12=0$;

(D) $x+2y-8=0$.

解: 设椭圆的弦为P_1P_2，$M(4,2)$是P_1P_2中点，再设$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，则由P_1、P_2位于椭圆上得

$$\begin{cases} x_1^2+4y_1^2-36=0 & ① \\ x_2^2+4y_2^2-36=0 & ② \end{cases}$$

由①−②得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}\cdots(*)$

由中点公式易知:

$x_1+x_2=8$, $y_1+y_2=4$. 又由斜率公式易知$k_{P_1P_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

故由$(*)$知$k_{P_1P_2}=-\frac{1}{2}$，于是P_1P_2: $y-2=-\frac{1}{2}(x-4)$，即P_1P_2: $x+2y-8=0$. 故选(D).

当代著名教育学家波利亚说: “一个大的发现可以解决一个大的问题，但在解决任何一个问题中都有一点点发现.” 当此题解完后，我们从$(*)$式发现: 圆锥曲线$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$的割线斜率$k$可用弦中点坐标$(x_0,y_0)$表示，即$k_{P_1P_2}=-\frac{x_0}{4y_0}$.

类似于此，我们容易得到下述关于圆锥曲线的割线斜率公式:

[公式一] 设$(P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是有心

曲线$Ax^2+By^2=1$上两点, 且$x_1\neq x_2$, $M(x_0,y_0)$是P_1P_2的中点, 则$k_{P_1P_2}=-\frac{Ax_0}{By_0}$;

[公式二] 设$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是无心曲线$y^2=2px$(或$x^2=2py$) $(p\neq 0)$上两点, 且$x_1\neq x_2$, $M(x_0,y_0)$是P_1P_2的中点, 则$k_{P_1P_2}=\frac{p}{y_0}$(或$k_{P_1P_2}=\frac{x_0}{p}$).

对于有关圆锥曲线弦中点高考题和对称性高考题, 若是直接应用此两公式求解, 不仅简洁明快, 而且操作方便. 现示例如下:

一、快速求出割线斜率

例1 (1981年全国高考题) 给定双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$, (1) 过点$D(2,1)$的直线l与所给双曲线交于P_1及P_2, 求线段P_1P_2的中点P的轨迹方程; (2) 过点$E(1,1)$能否作直线m, 使m与所给双曲线交于两点Q_1及Q_2, 且点E是线段Q_1Q_2的中点? 这样的直线m如果存在, 求出它的方程, 如果不存在, 说明理由.

解: (1) 设$P(x_0,y_0)$是P_1P_2中点, 由$A=1$, $B=-\frac{1}{2}$及公式一知$k_{P_1P_2}=\frac{2x_0}{y_0}$, 得$l$: $y-1=\frac{2x_0}{y_0}(x-2)$. 又由$P\in l$得$y_0-1=\frac{2x_0}{y_0}(x_0-2)$, 即$2x_0^2-y_0^2-4x_0+y_0=0$就是所求$P$点的轨迹方程.

(2) 假设适合条件的直线m存在, 则由题$A=1$, $B=-\frac{1}{2}$, $x_0=1$, $y_0=1$知直线m: $y-1=2(x-1)$, 将$y=2x-1$代入$x^2-\frac{y^2}{2}=1$得$2x^2-4x+3=0$, 由$\Delta=16-24<0$知直线m与双曲线不相交, 故适合条件的直线m不存在.

二、快速确定参数关系

例2 (1994年江西宜春高三统考题) 椭圆: $mx^2+ny^2=1$与直线$y=1-x$交于M、N两点, 过原点与线段MN中点的直线斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则$m:n$的值是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; (C) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; (D) $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

解: 设$P(x_0,y_0)$是MN中点, 由$A=m$, $B=n$及公式一知$k_{MN}=-\frac{mx_0}{ny_0}=-1$, 又由题知$k_{OP}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 得$m:n=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选(A).

三、快速求出弦中点坐标(或割线斜率), 进而求解参数范围题

例3 (1986年广东高考题) 已知椭圆C的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 试确定$m$的取值范围, 使得对于直线$l: y=4x+m$, 椭圆$C$上有不同的两点关于该直线对称.

解: 设P_1、P_2是C上关于l对称的两点, 且$M(x_0,y_0)$是P_1P_2的中点, 则由$A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{3}$及公式一知$k_{P_1P_2}=-\frac{3x_0}{4y_0}=-\frac{1}{4}$, 得$y_0=3x_0$.

由$M\in l$得$3x_0=4x_0+m$, $x_0=-m$, $y_0=-3m$, 又由$M(x_0,y_0)$位于椭圆C内得$\frac{m^2}{4}+\frac{9m^2}{3}<1$于是$m\in\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.

例4 (1987年广东高考题) 直线l通过抛物线$y^2=2px$ $(p\neq 0)$的焦点, 并且与这条抛物线相交于$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$两点, (1) 求证: $4x_1x_2=p^2$; (2) 求证: 对于这条抛物线的任何给定的一条弦CD, 直线l不是CD的垂直平分线.

解: (1) 易知抛物线焦点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$, 设$M(x_0,y_0)$是$P_1P_2$的中点,则由公式二知$k_{P_1P_2}=\frac{p}{y_0}$, 得$l$: $y=\frac{p}{y_0}\left(x-\frac{p}{2}\right)$, 代入$y^2=2px$得$p^2x^2-(p^3+2py_0^2)x+\frac{p^4}{4}=0$, 由此得$4x_1x_2=p^2$.

(2) 设有弦CD恰被$l: y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$垂直平分于$M(x_0,y_0)$, 则由公式二知: $k_{CD}=\frac{p}{y_0}=-\frac{1}{k}$, 得$y_0=-pk$, 由$M\in l$得$-pk=k\left(x_0-\frac{p}{2}\right)$, 于是$x_0=-\frac{p}{2}$ (x_0与p异号). 因这与$M(x_0,y_0)$应位于抛物线$y^2=2px$内(x_0与p同号)相矛盾, 故对于任意的弦CD, l不是CD的垂直平分线.

例5 (1991年广东预考题) 给出直线$l: y=$

$k\left(x-\frac{3}{8}\right)$和曲线$C: y=2x^2$, 如果曲线$C$上恒有不同两点$P$、$Q$关于直线$l$对称, 求$k$的取值范围.

解: 设$M(x_0,y_0)$是PQ中点, 则由$2p=\frac{1}{2}$及公式二知$k_{PQ}=4x_0=-\frac{1}{k}$, 得$x_0=-\frac{1}{4k}$. 由$M\in l$, 得

$$y_0=-\frac{2+3k}{8}, M\left(-\frac{1}{4k},-\frac{2+3k}{8}\right).$$

由直线PQ的方程$y+\frac{2+3k}{8}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{1}{4k}\right)$与曲线$C$的方程$y=2x^2$联立, 消元后得

$$2x^2+\frac{1}{k}x+\frac{2+3k}{8}+\frac{1}{4k^2}=0,$$

由$\Delta=\frac{1}{k^2}-8\left(\frac{2+3k}{8}+\frac{1}{4k^2}\right)>0$得$(k+1)(3k^2-k+1)<0$, 于是得$k<-1$, 这就是$k$的取值范围.

说明: 例3与例4(2)求出弦中点坐标$M(x_0,y_0)$后, 亦可类于例5, 写出相应割线方程与圆锥曲线方程联立, 然后用判别式法求解; 同时, 例5求出弦中点坐标$M(x_0,y_0)$后, 也可类于例3、例4(2), 然后用几何性质求解.

例6 (1992年全国高考题) 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, P_1、P_2是椭圆上的两点, 线段P_1P_2的垂直平分线与x轴相交于点$P(x_0,0)$, 证明: $-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

解: 设$M(x_1,y_1)$是P_1P_2的中点, 由公式一知: $k_{P_1P_2}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. P_1P_2的垂直平分线l: $y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$, $P\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1,0\right)$. 由$M(x_1,y_1)$位于椭圆内得$-a<x_1<a$, 于是

$$-\frac{a^2-b^2}{a}<\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1<\frac{a^2-b^2}{a},$$

即$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$成立.

课本习题与数学竞赛

江苏省天一中学　何志奇

我们知道教学大纲规定的教学要求, 亦是学科竞赛的基本要求, 特别, 第一试的竞赛试题与目前的数学教学是很贴近的.

从近几年全国高中联赛第一试的部分试题为例, 探讨数学内容及相互间的联系: 立几的线面关系和有关计算占21%, 复数的性质和证明占8.3%; 函数的图象和性质占5%, 方程占3%, 三角式的求值和证明占6.8%, 数列占9.7%, 解析几何占16.7%, 不等式的证明和运算占12.5%, 覆盖了整个高中阶段的重点内容.

以代数为例, 体现了以集合论为基础, 以函数为纲, 不等式, 数列和数学归纳法、复数、排列组合、二项式定理为主线的体系, 其中的基本概念、基本原理有普遍的适用性和后继性. 因此, 研究课本习题与数学竞赛的联系, 就显得很重要了.

以下, 试举几道竞赛题和课本习题紧密结合的题目.

1. 直接用做竞赛题的, 如立几异面直线距离公式.

2. 求满足方程组

$$\begin{cases} y=4x^3-3x \\ z=4y^3-3y \\ x=4z^3-3z \end{cases}$$ 的实数(x,y,z).

(北京市1990年奥赛集训题)

分析: 方程组中的每一个方程类似于三倍角公式$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

这就给我们提供了数学模型, 但$|x|$、$|y|$、$|z|$均不能大于1.

解: 若$|x|>1$, 由$y=4x^3-3x=x^3+$

$3x(x^2-1)$, 知 $|y|>|x|$, 同理 $|z|>|y|$, $|x|>|z|$, 则互相矛盾, 所以 $|x|$、$|y|$、$|z|$ 均小于等于1, 设 $x=\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, 则原方程可化为

$$\begin{cases} y=\cos 3\theta \\ z=\cos 9\theta \qquad \text{即} \cos\theta=\cos 27\theta. \\ x=\cos 27\theta, \end{cases}$$

解方程 $\cos\theta-\cos 27\theta=0$. $\sin 13\theta\sin 14\theta=0$. $\sin 13\theta=0$ 或 $\sin 14\theta=0$, $\theta=\frac{k\pi}{13}$, $k=0,1,2,\cdots,13$, $\theta=\frac{k\pi}{14}$, $k=1,2,\cdots,13$. $\therefore (x,y,z)=(\cos\theta,\cos 3\theta,\cos 9\theta)$ 共27个解.

3. 证明 $N=(5^{125}-1)/(5^{25}-1)$ 不是质数.

(第33届IMO预选题韩国提供).

分析: 逆用乘法公式即可.

解: 设 $x=5^{25}$, 则

$$\begin{aligned} N&=x^4+x^3+x^2+x+1 \\ &=(x^2+3x+1)^2-5x(x+1)^2 \\ &=[(x^2+3x+1)-5^{13}(x+1)][(x^2+3x+1)+5^{13}(x+1)], \end{aligned}$$

所以 N 不是质数.

4. 美国第三届普特南数学竞赛题有一道是求 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^k$ 的值.

这题直接用二项式系数的性质即可. 解略.

5. 高中代数下册P.15第11题, 求证

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\frac{x^2+y^2}{2},$$

即 $(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)$ $(*)$等号当且仅当 $x=y$ 时成立.

证明极易, 但其应用却十分广泛. 如(1) 1989年全国高中联赛题: 当 S 和 t 取遍全体实数时, 求 $(S+5-3|\cos t|)^2+(S-2|\sin t|)^2$ 所能达到的最小值. 解略.

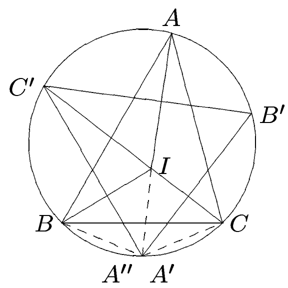
(2) 美国第七届数学奥林匹克: 已知 $a+b+c+d+e=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$, 试确定 e 的最大值.

解: 据 $(*)$, 可得 $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(c+d)^2\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2$ 即 $16-e^2\geqslant\frac{1}{4}(8-e)^2$,

$\therefore 0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$, 故 $e_{\max}=\frac{16}{5}$.

6. 初中《几何》课本第二册P.116有这样一题: 在 $\triangle ABC$ 中, E 是内心, $\angle A$ 的平分线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D. 求证: $DE=BD=CD$, 这道题看似平常, 但它揭示了三角形内心的一条重要性质, 许多竞赛题均是由它发展、演变而来的.

举一例: 1988年第17届美国数学奥林匹克试题: 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 且 A', B', C' 分别为 $\triangle IBC$, $\triangle IAC$, $\triangle IAB$ 的外心, 证明: $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有相同的外心.



证明: 只要证明 A, B, C, A', B', C' 六点共圆即可. 作出 $\triangle ABC$ 的外接圆, 延长 AI 交该外接圆于点 A'', 圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 故 A'' 必为 $\overset{\frown}{BC}$ 之中点. 即 $\overset{\frown}{A''B}=\overset{\frown}{A''C}$. 由上面的习题结论知 $A''B=A''I=A''C$ 知 A'' 是 $\triangle IBC$ 的外心, 得 A'' 即 A'.

即 A' 在 $\triangle ABC$ 外接圆上,故 A、B、C、A'、B'、C' 六点共圆.

此题用上面习题来证, 比起其它书刊上介绍的解法要简捷得多.

从以上几例, 笔者认为:

1. 要高观点下认真研究竞赛题和教材习题的关系, 数学竞赛题应是教材习题改革的"试验田".

近年来,高等数学和某些专门领域的问题、方法,通过"初等化"、"具体化"、"特殊化"而移植到数学竞赛中,特别是组合数学,不仅在各种数学竞赛中所占的比例越来越大,而且已悄悄渗入了中学数学教材,另外,函数逼近论、规划论、凸函数和不等式等高等数学的内容和方法;通过数学竞赛这座联系中学数学和大学数学的

桥梁,源源不断地输入中学,这对中学数学教学内容改革,教材习题结构编排起着重要作用.

2. "应用数学题目"应渗透到课本习题和竞赛题中去.

1992年8月的第七届国际数学教育大会上,有一场唯一的辩论会, 其题目正是"数学竞赛". 攻方认为, 数学竞赛人数少, 题难且偏, 与实际脱节, 过早地专业化, 影响中学生广泛吸收知识, 等等. 当然, 辩方也一一给予反驳. 其实, 这个问题是可以有机结合解决的. 一方面, 我们有竞赛的普及性的坚实的基础. 另一方面, 可以搞一点应用数学知识的竞赛, 象上海市举办的中学生数学知识应用竞赛, 北京市的"方正杯"中学生数学知识应用竞赛就很好.

例谈数与形的相对性

安徽省宿州市曹村中学　谢方伟

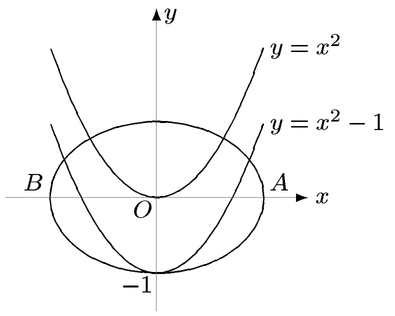
"数"和"形"是数学研究的两类基本对象, 也是矛盾的双方. 两者相互依存, 既对立又统一. 在运用"数形结合"的思想和方法时, 如果片面夸大或抑制"数"或"形"中的一方, 常常会使我们的解题陷入困境或导致错误.

例1 若抛物线$y = x^2 + m$与椭圆$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$有四个不同的交点, 则m的取值范围是…………( )

(A) $m > -2$; (B) $m > -\dfrac{17}{8}$;

(C) $-2 < m < -1$; (D) $-\dfrac{17}{8} < m < -1$.

错解: 画出椭圆与抛物线的图形, 动抛物线: $y = x^2 + m$由$y = x^2$向下移动, 若有四个交点, 必有: $m < -1$, 若继续下移, 当抛物线经过点$A(\sqrt{2}, 0)$、$B(-\sqrt{2}, 0)$时, A、B是两个切点了. 把$x = \pm\sqrt{2}$代入抛物线方程. 得: $m = -2$.



综上: 如有四个交点, 则$-2 < m < -1$. 故选(C).

这种作法与选择, 在班上同学中普遍存在.

但是这种选择是错误的. 因为当$m = -2$时, 可检验得抛物线: $y = x^2 - 2$与椭圆: $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$仍有四个交点.

究其原因是学生的作图不能很准确. 把"数形结合"片面地理解为"用纯粹图形来解决数量问题", 把A, B两点误认为两个切点.

正解: 抛物线$y = x^2 + m$与椭圆$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$的交点坐标由$\begin{cases} y = x^2 + m \\ \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$所确定.

消去x^2得: $2y^2 + y - m - 2 = 0 \cdots\cdots (*)$

由于椭圆与抛物线的交点关于y轴对称, 所以y轴一侧的交点的纵坐标由$(*)$所确定. 当两个交点重合时, $(*)$的判别式$\Delta = 0$, 即$1 + 8(m+2) = 0$, $\therefore m = -\dfrac{17}{8}$.

于是m的取值范围为$-\dfrac{17}{8} < m < -1$. 故应选(D).

例2 A为椭圆$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$上任一点, B为圆$(x-1)^2 + y^2 = 1$上任一点, 求$|AB|$的最大和最小值.

错解: 由平几知识, AB必过圆心$M(1, 0)$. 从而问题转化为$|MA|$的最大与最小值问题.

由动圆的意义: 以 $M(1,0)$ 为圆心, 动半径为 r 的圆在与椭圆相切时取得最值. 从而由

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\\(x-1)^2+y^2=r^2,\end{cases}\quad \text{消去}y^2\text{得}$$

$16x^2-50x+250-25r^2=0$.

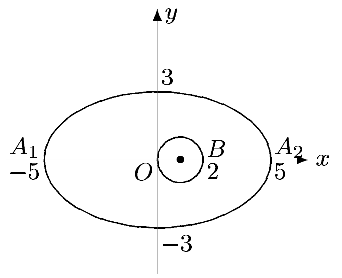
由$\Delta=0$即$50^2-4\times16(250-25r^2)=0$,

得$r=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

故: $|AB|_{\min}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}-1$. $|AB|_{\max}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}+1$.

但实际上, 上面所得的最值是错误的. 最大值和最小值能否同时取得, 是判断其结果正确与否的一个关键. 可是学生仅从上述代数解法中是难以完成任务.

正解: 在得到上述结果后, 再"以形助数", 作图如下:



则从图中, 可直观地得到: $|AB|$ 的最大值为7. 因此:

$|AB|_{\min}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}-1$、$|AB|_{\max}=7$.

究以上错解原因, 是将"形数结合"片面地夸大成"数对形"的决定作用而又无法用新的数量关系来检验结果.

综上可得启示: 正确理解"数"与"形"的相对性、"数形结合"的内涵, 对解题很有好处.

"直线与圆相切"的过程教学

上海市杨浦区靖宇中学　宋德秀

数学教学不能"逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练"(数学是什么), 应该是数学活动的过程的演习, 重视知识体系的形成过程, 强调数学思想方法的形成过程, 强调分析与概括的展宽和特写. 我们称这种教学为"过程教学". 下面是一个实例.

直线与圆相切的定义是"当直线与圆有唯一公共点时, 叫做圆与直线相切". 这里, 有 "唯一公共点"是很高的概括, 其含义不易被学生理解. 于是我设计了如下的教学活动:

1. 概念和定理的概括过程: 由图形直观进入数量刻划.

首先, 让学生观察两类变化(见图1):

① 直线l与$\odot O$的半径OA保持垂直,平移l, 引导学生把l与圆的交点个数从没有到两个的变化, 与l和OA的交点到圆心的距离d的变化

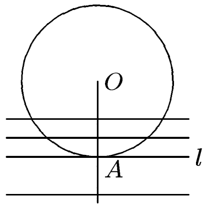


图1–1

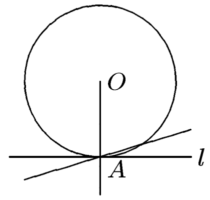


图1–2

对应起来, 作出判断: "有唯一公共点"对应"长度$d=r$(其中r为$\odot O$的半径)". ② 保持两线(l和OA)交点与圆心的连线长度为r不变, 改变l与半径OA的夹角, 把l与圆的交点个数从两个到一个的变化, 与l和OA的夹角度数的

变化对应起来, 作出判断: "有唯一公共点"对应"夹角为90°". 由此概括出刻划"有唯一公共点"的两个量——①两线交点与圆心O的连线的长度. ②l与OA夹角的度数. 那么, "有唯一公共点"的含义即为: "长度"为r或"角度"为90°. 在理解这一含义后, 让学生进行整理和表述, 给出判定定理: "$d = r \iff$直线与圆相切"; "过半径的外端点且垂直于这条半径的直线与圆相切."

为了使学生更好地掌握圆的切线的判定定理, 笔者在概括了直线与圆相切的三个要素(即①$l \perp OA$ ②OA为半径 ③l过OA的外端点A)之后, 随即给出以下一组题进行辨析(见图2). 要求学生说清楚哪一条要素未被满足, 从正反两方面对概念加深理解.

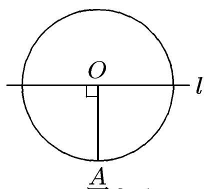


图2–1

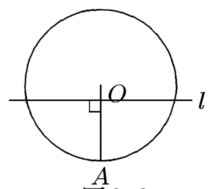


图2–2

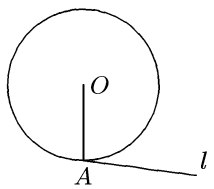


图2–3

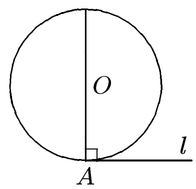


图2–4

2. **应用定理, 突出基本的思考方法.**

为了使学生掌握定理, 教学中, 给出以下例题.

例1 如图3, $\triangle AOB$中, $AO = BO$, AB的中点C在$\odot O$上.

求证: AB与$\odot O$相切.

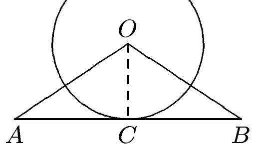


图3

分析时, 以"如何证圆的切线"为题可引出两条思路:

①连OC, OC即为半径, 再证$OC \perp AB$;

②过O点作$OD \perp AB$于D, 再证D点即为C点, 即OD为半径.

通过例1的讲解, 概括出证明直线与圆相切的一般方法: ①有半径, 证"⊥". ②无半径, 可以"连"半径, 证"⊥", 或作垂直, 再证"半径". 当然须指出"过半径的外端点".

3. **延伸问题, 以图形运动引导、启发学生提出问题、改编问题.**

先从例题出发.

例2 已知: $\odot O$中, 半径$OA \perp OB$, 弦AP交OB于D, 在OB上找一点C, 使$CP = CD$.

求证: CP为$\odot O$的切线.

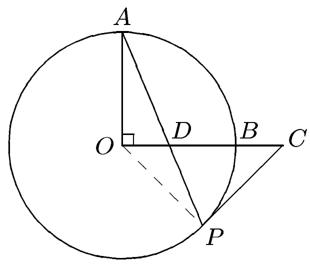


图4

学生会想到连OP, 再证明$OP \perp PC$, 但实践表明, 学生对此题的作图有困难, 表现在C点如何找. 我们解决的办法是提出问题: C具有怎样的性质? ($CP = CD$), 应在何处? 归结为应是线段DP的中垂线与OB的交点. 然后, 请学生总结证题要点在于"连OP, 证垂直".

让学生考虑点P是否可以在圆的其他位置上, C点如何找? "CP为圆的切线"是否仍然成立? 让学生作图, 并注出相应字母. 学生主要得到以下图形(见图5).

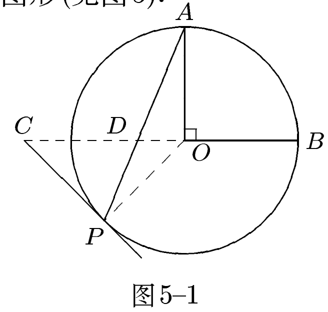


图5–1

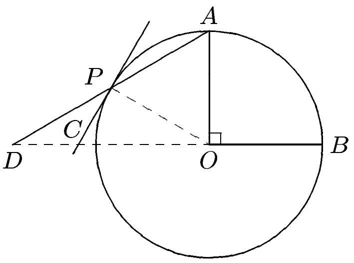


图5–2

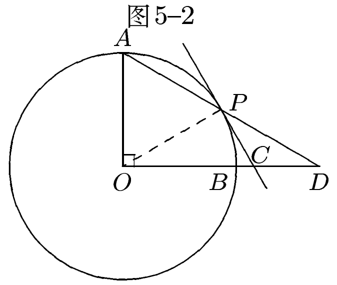


图5–3

由这些图形的作图和分析, 一个图变成了三个图,要求学生适当改变原题的“已知”,并口述证明过程. 在此基础上引导学生反思, 提出: $OA\perp OB$ 是本题的实质之一, 如果保持 OA 与 OB 的垂直关系, 而改变它们的垂足位置, 让半径 OB 延伸为直线 QB, 其余条件保持不变, 问题将有怎样的变化? “CP 是圆的切线”这一结论是否改变? 当 QB 与 $\odot O$ 相交时(如图6–1), 仍然可以通过连 OP, 证 $OP\perp PC$, 从而得到“PC 是 $\odot O$ 的切线”.

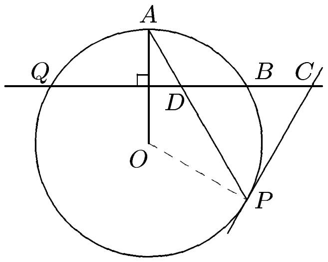


图6–1

和前面一样, 让学生考虑随着点 P 在圆上的位置的变化, 图形有何变化? 学生自己作出图形, 可得图6–2, 利用同样的方法, 仍然可以证明“PC 是图的切线”.

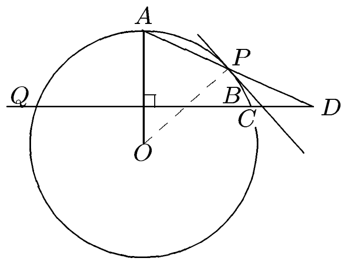


图6–2

继续引导学生思考, 当 QB 与 $\odot O$ 相离时和 QB 与 OA 垂直相交于 A 点时, 分别可得怎样的图形? 结论是否仍然成立? 让学生自己思考画图并证明. 可得以下图形(图6–3, 图6–4), 不难证明, PC 仍然是 $\odot O$ 的切线.

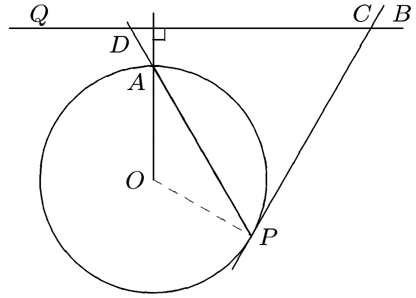


图6–3

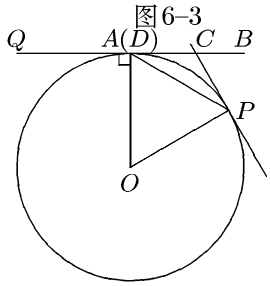


图6–4

最后让学生把以上四个图并在一起, 改变原题条件而编题, 得到:

已知: OA 为圆的半径, 直线 $QB\perp OA$, 点 P 在圆上, AP 与 QB 相交于点 D, C 为 QB 上一点, $CP=CD$.

求证: CP 为圆的切线.

以上教学结果一课时完成不了, 就两课时, 坚持让学生思考, 提高思维素质.

余弦定理教学的两个步骤

广西梧州师专 邹泽民

如何进行定理教学, 笔者认为其一是通过教师能动地引导, 使学生能主动地自我发现定理; 其二是教会学生掌握数学思想方法, 能运用"联想旧知, 提出问题, 挖掘条件, 猜想结论, 推证新知, 问题解决"的六段式科研探索步骤.

下面我们以解斜三角形的余弦定理教学为例, 解释这两个步骤.

[1] 用由特殊到一般的思想方法, 启发学生复习旧知, 即在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中有下列关系($C=90°$):

(1) 边的关系有勾股定理$c^2=a^2+b^2$;

(2) 角的关系有两锐角互余$\angle A+\angle B=90°$;

(3) 边角关系有锐角三角函数$\sin A=\dfrac{a}{c}$, $\cos A=\dfrac{b}{c}$, $\mathrm{tg}\,A=\dfrac{a}{b}$, $\mathrm{ctg}\,A=\dfrac{b}{a}$.

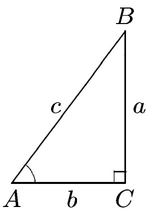


图1

提出新问题: 若把原来条件$\angle C=90°$改为$\angle C\neq 90°$时, 则直角三角形变为一般斜三角形, 那么三角形三边与$\angle C$ ($\angle C$为锐角或钝角), 将是否还有勾股定理关系呢? 若无, 又会构成怎样的内在联系?

再看图2所示的实际问题, 要在山里挖一条隧道AB, 我们在山的一侧取定一点C, 测得$BC=a=180$(米), $AC=b=210$(米), $\angle ACB=52°36'$. 如何根据已测出的数据算出隧道AB的长度呢?

这就归结为已知三角形两边及夹角,求第三边的问题.于是联想到将斜三角形问题化归为直角三角形来解决.为此须作辅助线: 过B作AC的垂线BD交AC于D,分原斜三角形为两个直角三角形.接着进行层层探索,导出结论:

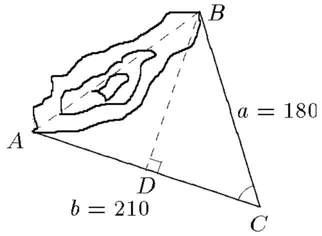


图2

$AB^2=AD^2+DB^2=(AC-BC\cdot\cos C)^2+BC^2\cdot\sin^2 C=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$,

即$c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos C\cdots\cdots\cdots$(I)

由此得到原问题的解决: 隧道长

$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}\approx 175$(米)

归纳以上发现过程, 便可诱导学生顺利地总结出余弦定理. 在探求和推证结论的过程中突出强调了"斜三角形转化为直角三角形"的化归数学思想方法, 并指出这个方法是"问题解决"关键所在.

[2] 指导学生深化定理结论.

在定理形成之后, 还要继续深化定理, 获取后继成果. 这体现在如下七个方面:

(1) 加强定理条件与结论的再认识

明确余弦定理本身解决了已知任意三角形两边及夹角,求第三边的问题,提高学生运用余弦定理分析和解决斜三角形相关问题的能力.

(2) 在特殊条件下形成新推论

在$\triangle ABC$中若加强条件令$\angle C=90°$, 此时的余弦定理即变成勾股定理, 同时还对余弦

定理进行分类:

在$\triangle ABC$中, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=$

$$\begin{cases} a^2+b^2+2ab\cos(180^\circ-C) & 当C>90^\circ \\ a^2+b^2 & 当C=90^\circ \\ a^2+b^2-2ab\cos C & 当C<90^\circ \end{cases}$$

$\cdots\cdots$ (II)

并且由(II)可重新推证定理"三角形中大角对大边".

(3) 在附加(或改变)条件下获得新结论

若变换问题的方向(或方位), 即把余弦定理的条件改为已知三角形三边, 求任一边的对角的新问题时, 可由余弦定理反向变形得到余弦定理的第二种表现形式, 即在$\triangle ABC$中, 有

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\begin{cases} <0 & C为钝角 \\ =0 & C为直角 \\ >0 & C为锐角 \end{cases}\cdots\cdots(\text{III})$$

同时, 若条件改为已知两边之和, 两边之积及夹角, 则有

$$c^2=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)\cdots\cdots(\text{IV})$$

或改为已知两边之和, 两边之积及此两边的对角和, 则有

$$c^2=(a+b)^2-4ab\cdot\sin^2\frac{A+B}{2}\cdots\cdots(\text{V})$$

若条件改为已知两边之和, 两边之积及第三边, 则有

$$\cos C=\frac{(a+b)^2-(c^2+2ab)}{2ab}\cdots\cdots(\text{VI})$$

通过以上逆向或变式思维, 训练学生多方位变式应用数学公式的能力.

(4) 继续研究定理的逆否定理形式(或探讨逆命题是否成立)

例如余弦定理的逆否形式可表述为"如果三线段及一角不满足余弦等式, 则这三线段及角不构成三角形". 通过转换定理形式的训练, 加强学生对定理的更深层次的理解—— 提高到"等价"概念的认识.

(5) 继续分析本定理在某一定理体系中的地位与作用

明确在解三角形的定理系统中, 正、余弦定理是共同解决三角形边角问题的两个重要定理各有独立功能, 又相辅相成, 互作补充. 正弦定理主要解决已知三角形两边及一边对角或已知三角形两角及一角对边, 求解三角形问题; 余弦定理主要解决已知两边(或两边之和、积)及夹角或已知三边(或两边和、积及第三边)求解三角形问题, 且勾股定理是余弦定理之特例. 从而让学生从知识系统结构中去重建自己的认知结构, 建构起定理体系的记忆系统网络.

(6) 强化定理的实际应用功能

如联想到运用余弦定理去解决三角形的三条重要线段长的计算, 启导学生自行推证, 归纳得出余弦定理的两个具体应用定理:

[定理1] 已知三角形三边a、b、c, 则有

1) BC边上的中线长

$$AM^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2,$$

2) BC边上的高

$$AD=h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p=\frac{a+b+c}{2},$$

3) $\angle BAC$的内角平分线

$$AE^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

4) $\angle BAC$的外角平分线

$$AE'^2=\frac{a^2bc}{(c-b)^2}-bc.$$

[定理2] 已知三角形两边b、c及夹角A, 则有$(c>b)$

1) 第三边BC上的中线

$$AM=\frac{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}}{2},$$

2) 第三边BC上的高

$$AD=h_a=\frac{b\cdot c\cdot\sin A}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}},$$

3) $\angle BAC$的内角平分线

$$AE=\frac{2bc\cdot\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

4) $\angle BAC$的外角平分线

$$AE'=\frac{2bc\cdot\sin\frac{A}{2}}{c-b}.$$

(7) 对定理作出全面归纳总结, 得到系统性结果

在定理教学的最后, 作一个简明扼要的概括总结, 强调定理条件的适用性与变通性.

1996年普通高等学校招生全国统一考试

数　　学(理工农医类)

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分. 共150分. 考试时间120分钟.

第I卷(选择题　共65分)

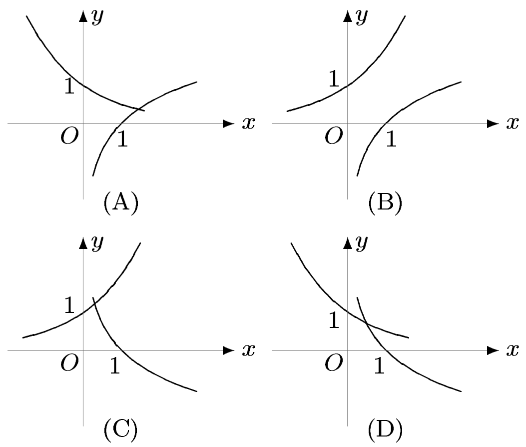
一、选择题: 本大题共15小题; 第1——10题每小题4分, 第11——15题每小题5分, 共65分.

(1) 已知全集 I =N, 集合 $A=\{x|x=2n,n\in \mathrm{N}\}$, $B=\{x|x=4n,n\in\mathrm{N}\}$. 则

(A) $I=A\cup B$　　(B) $I=\overline{A}\cup B$

(C) $I=A\cup\overline{B}$　　(D) $I=\overline{A}\cup\overline{B}$

(2) 当 $a>1$ 时, 在同一坐标系中, 函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是



(3) 若 $\sin^2 x>\cos^2 x$, 则 x 的取值范围是

(A) $\left\{x\left|2k\pi-\frac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{4}\pi,\ k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

(B) $\left\{x\left|2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{5}{4}\pi,\ k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

(C) $\left\{x\left|k\pi-\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{1}{4}\pi,\ k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

(D) $\left\{x\left|k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi,\ k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

(4) 复数 $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$ 等于

(A) $1+\sqrt{3}i$　　(B) $-1+\sqrt{3}i$

(C) $1-\sqrt{3}i$　　(D) $-1-\sqrt{3}i$

(5) 如果直线 l、m 与平面 α、β、γ 满足: $l=\beta\cap\gamma$, $l/\!/\alpha$, $m\subset\alpha$ 和 $m\perp\gamma$, 那么必有

(A) $\alpha\perp\gamma$ 且 $l\perp m$　　(B) $\alpha\perp\gamma$ 且 $m/\!/\beta$

(C) $m/\!/\beta$ 且 $l\perp m$　　(D) $\alpha/\!/\beta$ 且 $\alpha\perp\gamma$

(6) 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的

(A) 最大值是1, 最小值是 -1

(B) 最大值是1, 最小值是 $-\frac{1}{2}$

(C) 最大值是2, 最小值是 -2

(D) 最大值是2, 最小值是 -1

(7) 椭圆 $\begin{cases} x=3+3\cos\phi, \\ y=-1+5\sin\phi \end{cases}$ 的两个焦点坐标是

(A) $(-3,5)$, $(-3,-3)$ (B) $(3,3)$, $(3,-5)$

(C) $(1,1)$, $(-7,1)$ (D) $(7,-1)$, $(-1,-1)$

(8) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 则 $\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]+\arccos[\sin(\pi+\alpha)]$ 等于

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) $-\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{2}-2\alpha$　　(D) $-\frac{\pi}{2}-2\alpha$

(9) 将边长为 a 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起, 使得 $BD=a$, 则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为

(A) $\frac{a^3}{6}$　　(B) $\frac{a^3}{12}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

(10) 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-1$, 前 n 项和为 S_n, 若 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 等于

(A) $\frac{2}{3}$　(B) $-\frac{2}{3}$　(C) 2　(D) -2

(11) 椭圆的极坐标方程为$\rho=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$, 则它在短轴上的两个顶点的极坐标是

(A) $(3,0)$, $(1,\pi)$

(B) $\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

(C) $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(2,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

(D) $\left(\sqrt{7},\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{7},2\pi-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(12) 等差数列$\{a_n\}$的前m项和为30, 前$2m$项和为100, 则它的前$3m$项和为

(A) 130 (B) 170 (C) 210 (D) 260

(13) 设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<a<b)$的半焦距为c, 直线l过$(a,0)$, $(0,b)$两点. 已知原点到直线l的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$, 则双曲线的离心率为

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(14) 母线长为1的圆锥体积最大时, 其侧面展开图圆心角ϕ等于

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

(C) $\sqrt{2}\pi$ (D) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

(15) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数, $f(x+2)=-f(x)$, 当$0\leqslant x\leqslant 1$时, $f(x)=x$, 则$f(7.5)$等于

(A) 0.5 (B) -0.5 (C) 1.5 (D) -1.5

第II卷(非选择题 共85分)

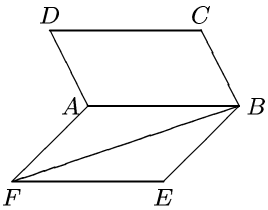
二、填空题: 本大题共4小题; 每小题4分, 共16分.

(16) 已知圆$x^2+y^2-6x-7=0$与抛物线$y^2=2px\,(p>0)$的准线相切, 则$p=$______.

(17) 正六边形的中心和顶点共7个点, 以其中3个点为顶点的三角形共有______个(用数字作答).

(18) $\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\sqrt{3}\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ$的值是______.

(19) 如图, 正方形$ABCD$所在平面与正方形$ABEF$所在平面成60°的二面角, 则异面直线AD与BF所成角的余弦值是______.



三(第20小题)、解答题: 本题满分11分.

解不等式$\log_a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)>1$.

四(第21小题)、解答题: 本题满分12分.

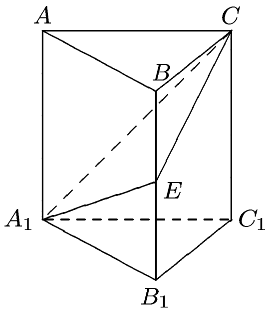
已知$\triangle ABC$的三个内角A, B, C满足:

$$A+C=2B,\ \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}.$$

求$\cos\dfrac{A-C}{2}$的值.

五(第22小题)、解答题: 本题满分12分.

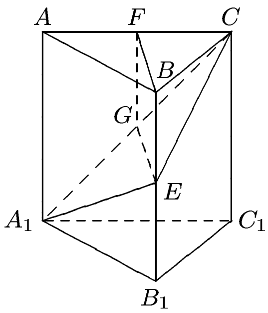
如图, 在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中, $E\in BB_1$, 截面$A_1EC\perp$ 侧面AC_1.



(I) 求证: $BE=EB_1$;

(II) 若$AA_1=A_1B_1$, 求平面A_1EC与平面$A_1B_1C_1$所成二面角(锐角)的度数.

注意: 在下面横线上填写适当内容, 使之成为(I)的完整证明, 并解答(II).



(I) 证明: 在截面A_1EC内, 过E作$EG\perp A_1C$, G是垂足.

① ∵ ________,

∴ $EG\perp$侧面AC_1; 取AC的中点F, 连结BF, FG, 由$AB=BC$得$BF\perp AC$.

② ∵ ________,

∴ $BF\perp$侧面AC_1; 得$BF/\!/EG$, BF、EG确定一个平面, 交侧面AC_1于FG.

③ ∵ ________,

∴ $BE/\!/FG$, 四边形$BEGF$是平行四边形, $BE=FG$.

④ ∵ ________,

∴ $FG/\!/AA_1$, $\triangle AA_1C\backsim\triangle FGC$,

⑤ ∵ ________,

∴ $FG=\dfrac{1}{2}AA_1=\dfrac{1}{2}BB_1$, 即$BE=\dfrac{1}{2}BB_1$, 故$BE=EB_1$.

六(第23小题)、解答题: 本题满分10分.

某地现有耕地10000公顷. 规划10年后粮食单产比现在增加22%, 人均粮食占有量比现在提高10%. 如果人口年增长率为1%, 那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷(精确到1公顷)?

$\left(\text{粮食单产}=\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}},\text{人均粮食占有量}=\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}\right)$

七(第24小题)、解答题: 本题满分12分.

已知l_1、l_2是过点$P(-\sqrt{2},0)$的两条互相垂直的直线, 且l_1、l_2与双曲线$y^2-x^2=1$各有两个交点, 分别为A_1、B_1和A_2、B_2.

(I) 求l_1的斜率k_1的取值范围;

(II) 若$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$, 求$l_1$、$l_2$的方程.

八(第25小题)、解答题: 本题满分12分.

已知a、b、c是实数, 函数$f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=ax+b$, 当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, $|f(x)|\leqslant 1$.

(I) 证明: $|c|\leqslant 1$;

(II) 证明: 当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, $|g(x)|\leqslant 2$;

(III) 设$a>0$, 当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, $g(x)$的最大值为2, 求$f(x)$.

数学试题(理工农医类)参考解答

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算. 第(1)——(10)题每小题4分, 第(11)——(15)题每小题5分. 满分65分

A型卷答案

(1) C	(2) A	(3) D	(4) B
(5) A	(6) D	(7) B	(8) A
(9) D	(10) B	(11) C	(12) C
(13) A	(14) D	(15) B	

B型卷答案 (略)

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题4分, 满分16分.

(16) 2 (17) 32 (18) $\sqrt{3}$ (19) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

三、解答题

(20) 本小题考查对数函数性质, 对数不等式的解法, 分类讨论的方法和运算能力. 满分11分.

解: (I) 当$a>1$时, 原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}>0,\\[2mm] 1-\dfrac{1}{x}>a.\end{cases}$$

由此得$1-a>\dfrac{1}{x}$.

因为$1-a<0$, 所以$x<0$,

∴ $\dfrac{1}{1-a}<x<0$.

(II) 当$0<a<1$时, 原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}>0, & ①\\[2mm] 1-\dfrac{1}{x}<a & ②\end{cases}$$

由①得, $x>1$或$x<0$,

由②得, $0<x<\dfrac{1}{1-a}$,

∴ $1<x<\dfrac{1}{1-a}$.

综上, 当$a>1$时, 不等式的解集为

$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{1-a}<x<0\right\}$;

当$0<a<1$时, 不等式的解集为

$\left\{x \middle| 1 < x < \dfrac{1}{1-a}\right\}$.

(21) 本小题考查三角函数基础知识, 利用三角公式进行恒等变形和运算的能力. 满分12分.

解法一: 由题设条件知$B=60°$, $A+C=120°$.

$\because \dfrac{-\sqrt{2}}{\cos 60°}=-2\sqrt{2}$,

$\therefore \dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$.

将上式化为

$\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$.

利用和差化积及积化和差公式, 上式可化为

$2\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$.

将$\cos\dfrac{A+C}{2}=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$, $\cos(A+C)=-\dfrac{1}{2}$代入上式得

$\cos\dfrac{A-C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C)$.

将$\cos(A-C)=2\cos^2\left(\dfrac{A-C}{2}\right)-1$代入上式并整理得

$4\sqrt{2}\cos^2\left(\dfrac{A-C}{2}\right)+2\cos\dfrac{A-C}{2}-3\sqrt{2}=0$,

$\left(2\cos\dfrac{A-C}{2}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\cos\dfrac{A-C}{2}+3\right)=0$,

$\because 2\sqrt{2}\cos\dfrac{A-C}{2}+3\neq 0$,

$\therefore 2\cos\dfrac{A-C}{2}-\sqrt{2}=0$.

从而得$\cos\dfrac{A-C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解法二: 由题设条件知$B=60°$, $A+C=120°$.

设$\alpha=\dfrac{A-C}{2}$, 则$A-C=2\alpha$, 可得$A=60°+\alpha$, $C=60°-\alpha$.

所以 $\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=$

$\dfrac{1}{\cos(60°+\alpha)}+\dfrac{1}{\cos(60°-\alpha)}=$

$\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$

$=\dfrac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}$.

依题设条件有 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\cos B}$,

$\because \cos B=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=-2\sqrt{2}$.

整理得$4\sqrt{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha-3\sqrt{2}=0$,

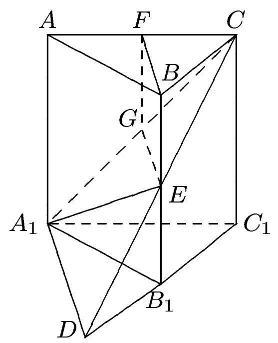
$(2\cos\alpha-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\alpha+3)=0$,

$\because 2\sqrt{2}\cos\alpha+3\neq 0$,

$\therefore 2\cos\alpha-\sqrt{2}=0$.

从而得 $\cos\dfrac{A-C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(22) 本小题考查空间线面关系, 正三棱柱的性质, 逻辑思维能力, 空间想象能力及运算能力. 满分12分.



(I) ① $\because$ 面$A_1EC\perp$侧面AC_1,

② $\because$ 面$ABC\perp$侧面AC_1,

③ $\because$ 面$BE/\!/$侧面AC_1,

④ $\because BE/\!/AA_1$,

⑤ $\because AF=FC$,

(II) 解: 分别延长CE、C_1B_1交于点D, 连结A_1D.

$\because EB_1/\!/CC_1$, $EB_1=\dfrac{1}{2}BB_1=\dfrac{1}{2}CC_1$,

$\therefore DB_1=\dfrac{1}{2}DC_1=B_1C_1=A_1B_1$,

$\because \angle B_1A_1C_1=\angle B_1C_1A_1=60°$,

$\angle DA_1B_1=\angle A_1DB_1$

$=\frac{1}{2}(180°-\angle DB_1A_1)=30°$,

$\therefore \angle DA_1C_1=\angle DA_1B_1+\angle B_1A_1C_1=90°$, 即$DA_1\perp A_1C_1$.

$\because CC_1\perp$面$A_1C_1B_1$, 即A_1C_1是A_1C在平面A_1C_1D上的射影,根据三垂线定理得$DA_1\perp A_1C$, 所以$\angle CA_1C_1$是所求二面角的平面角.

$\because CC_1=AA_1=A_1B_1=A_1C_1$,

$\angle A_1C_1C=90°$,

$\therefore \angle CA_1C_1=45°$, 即所求二面角为45°.

(23) 本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力, 指数函数和二项式定理的应用, 近似计算的方法和能力. 满分10分.

解: 设耕地平均每年至多只能减少x公顷, 又设该地区现有人口为P人, 粮食单产为M吨/公顷.

依题意得不等式

$$\frac{M\times(1+22\%)\times(10^4-10x)}{P\times(1+1\%)^{10}}\geqslant \frac{M\times 10^4}{P}\times(1+10\%).$$

化简得

$$x\leqslant 10^3\times\left[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}\right].$$

$$\because 10^3\times\left[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}\right]$$

$$=10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times(1+C_{10}^1\times0.01+C_{10}^2\times0.01^2+\cdots)]$$

$$\approx 10^3\times\left[1-\frac{1.1}{1.22}\times1.1045\right]$$

$$\approx 4.1.$$

$\therefore x\leqslant 4$(公顷).

答: 按规划该地区耕地平均每年至多只能减少4公顷.

(24) 本小题主要考查直线与双曲线的性质, 解析几何的基本思想, 以及综合运用知识的能力. 满分12分.

解: (I) 依题设, l_1、l_2的斜率都存在. 因为l_1过点$P(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点, 故方程组

$$\begin{cases} y=k_1(x+\sqrt{2}) \qquad (k_1\neq0),\\ y^2-x^2=1\end{cases} \qquad ①$$

有两个不同的解, 在方程组①中消去y, 整理得

$$(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0 \quad ②$$

若$k_1^2-1=0$, 则方程组①只有一个解, 即l_1与双曲线只有一个交点, 与题设矛盾. 故$k_1^2-1\neq0$, 即$|k_1|\neq1$. 方程②的判别式为

$\Delta_1=(2\sqrt{2}k_1^2)^2-4(k_1^2-1)(2k_1^2-1)=4(3k_1^2-1)$.

设l_2的斜率为k_2, 因为l_2过点$P(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点, 故方程组

$$\begin{cases} y=k_2(x+\sqrt{2}) \qquad (k_2\neq0),\\ y^2-x^2=1\end{cases} \qquad ③$$

有两个不同的解. 在方程组③中消去y. 整理得

$$(k_2^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_2^2x+2k_2^2-1=0. \quad ④$$

同理有$k_2^2-1\neq0$, $\Delta_2=4(3k_2^2-1)$.

又因为$l_1\perp l_2$, 所以有$k_1\cdot k_2=-1$.

于是, l_1、l_2与双曲线各有两个交点, 等价于

$$\begin{cases}3k_1^2-1>0,\\ 3k_2^2-1>0,\\ k_1\cdot k_2=-1,\\ |k_1|\neq1.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}<|k_1|<\sqrt{3},\\ |k_1|\neq1.\end{cases}$

$$\therefore k_1\in(-\sqrt{3},-1)\cup\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup(1,\sqrt{3}).$$

(II) 设$A_1(x_1,y_1)$, $B_1(x_2,y_2)$. 由方程②知

$$x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{2}k_1^2}{k_1^2-1},\ x_1\cdot x_2=\frac{2k_1^2-1}{k_1^2-1}.$$

$$\therefore |A_1B_1|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

$$=(1+k_1^2)(x_1-x_2)^2$$

$$=\frac{4(1+k_1^2)(3k_1^2-1)}{(k_1^2-1)^2} \qquad ⑤$$

同理, 由方程④可求得$|A_2B_2|^2$, 整理得

$$|A_2B_2|^2=\frac{4(1+k_1^2)(3-k_1^2)}{(1-k_1^2)^2}. \quad ⑥$$

由$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$, 得

$|A_1B_1|^2=5|A_2B_2|^2$.

将⑤、⑥代入上式得

$$\frac{4(1+k_1^2)(3k_1^2-1)}{(k_1^2-1)^2}=$$
$$5\times\frac{4(1+k_1^2)(3-k_1^2)}{(1-k_1^2)^2}.$$

解得$k_1=\pm\sqrt{2}$.

取$k_1=\sqrt{2}$时, $l_1: y=\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$, $l_2: y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\sqrt{2})$;

取$k_1=-\sqrt{2}$时, $l_1: y=-\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$, $l_2: y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\sqrt{2})$.

(25) 本小题主要考查函数的性质, 含有绝对值的不等式的性质, 以及综合运用数学知识分析问题与解决问题的能力. 满分12分.

(I) 证明: 由条件当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, $|f(x)|\leqslant 1$, 取$x=0$得$|c|=|f(0)|\leqslant 1$, 即$|c|\leqslant 1$.

(II) 证法一:

当$a>0$时, $g(x)=ax+b$在$[-1,1]$上是增函数,

$\therefore g(-1)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$,

$\because |f(x)|\leqslant 1(-1\leqslant x\leqslant 1)$, $|c|\leqslant 1$,

$\therefore g(1)=a+b=f(1)-c$

$\leqslant |f(1)|+|c|\leqslant 2$,

$g(-1)=-a+b=-f(-1)+c$

$\geqslant -(|f(-1)|+|c|)\geqslant -2$,

由此得 $|g(x)|\leqslant 2$;

当$a<0$时, $g(x)=ax+b$在$[-1,1]$上是减函数,

$\therefore g(-1)\geqslant g(x)\geqslant g(1)$,

$\because |f(x)|\leqslant 1(-1\leqslant x\leqslant 1)$, $|c|\leqslant 1$,

$\therefore g(-1)=-a+b=-f(-1)+c$

$\leqslant |f(-1)|+|c|\leqslant 2$,

$g(1)=a+b=f(1)-c\geqslant -(|f(1)|+|c|)\geqslant -2$,

由此得$|g(x)|\leqslant 2$;

当$a=0$时, $g(x)=b$, $f(x)=bx+c$.

$\because -1\leqslant x\leqslant 1$,

$\therefore |g(x)|=|f(1)-c|\leqslant |f(1)|+|c|\leqslant 2$.

综上得$|g(x)|\leqslant 2$.

证法二:

由$x=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}$, 可得

$$g(x)=ax+b$$
$$=a\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]+b\left(\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{2}\right)$$
$$=\left[a\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+b\left(\frac{x+1}{2}\right)+c\right]-\left[a\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+b\left(\frac{x-1}{2}\right)+c\right]$$
$$=f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, 有$0\leqslant\frac{x+1}{2}\leqslant 1$, $-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 0$,

根据含绝对值的不等式的性质, 得

$$\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\leqslant 2.$$

即$|g(x)|\leqslant 2$.

(III) 因为$a>0$, $g(x)$在$[-1,1]$上是增函数, 当$x=1$时取得最大值2,

即$g(1)=a+b=f(1)-f(0)=2$. ①

$\because -1\leqslant f(0)=f(1)-2\leqslant 1-2=-1$,

$\therefore c=f(0)=-1$.

因为当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, $f(x)\geqslant -1$, 即$f(x)\geqslant f(0)$,

根据二次函数的性质, 直线$x=0$为$f(x)$的图象的对称轴, 由此得

$-\frac{b}{2a}=0$, 即$b=0$.

由①得$a=2$.

所以$f(x)=2x^2-1$.

1996年全国普通高等学校招生统一考试

上海　数学试题(理工农医类)

考生注意：本试卷共有24道试题，满分150分．试卷中的选做题按A_1组、A_2组与B_1组、B_2组排列，A_1组对应B_1组，A_2组对应B_2组．考生从对应的两组中可以且只可以选做一组，若同时做了对应的两组试题，或分别做了对应的两组中的部分试题，则只对考生在A组中所完成的部分进行评分和记分．

一、选择题(本大题满分24分)

1. 已知集合$M=\{(x,y)|x+y=2\}$、$N=\{(x,y)|x-y=4\}$，那么集合$M\cap N$为

(A) $x=3$, $y=-1$; (B) $(3,-1)$;

(C) $\{3,-1\}$; (D) $\{(3,-1)\}$.

2. 在下列各区间中,函数$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的单调递增区间是

(A) $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$; (B) $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$;

(C) $[-\pi,0]$; (D) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. 如果$\log_a 3>\log_b 3>0$，那么a、b间的关系是

(A) $0<a<b<1$; (B) $1<a<b$;

(C) $0<b<a<1$; (D) $1<b<a$.

4. 在下列命题中，真命题是

(A) 若直线m、n都平行于平面α，则$m/\!/n$;

(B) 设$\alpha-l-\beta$是直二面角．若直线$m\perp l$，则$m\perp\beta$;

(C) 若直线m、n在平面α内的射影依次是一个点和一条直线，且$m\perp n$，则n在α内或n与α平行;

(D) 设m、n是异面直线．若m与平面α平行，则n与α相交．

5. 将椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$绕其左焦点按逆时针方向旋转$90^\circ$后所得的椭圆方程是

(A) $\dfrac{(x+4)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{9}=1$;

(B) $\dfrac{(x+4)^2}{25}+\dfrac{(y+4)^2}{9}=1$;

(C) $\dfrac{(x+4)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$;

(D) $\dfrac{(x+4)^2}{9}+\dfrac{(y+4)^2}{25}=1$.

6. 若函数$f(x)$、$g(x)$的定义域和值域都为$\mathbf{R}$，则$f(x)>g(x)$ $(x\in\mathbf{R})$成立的充要条件是

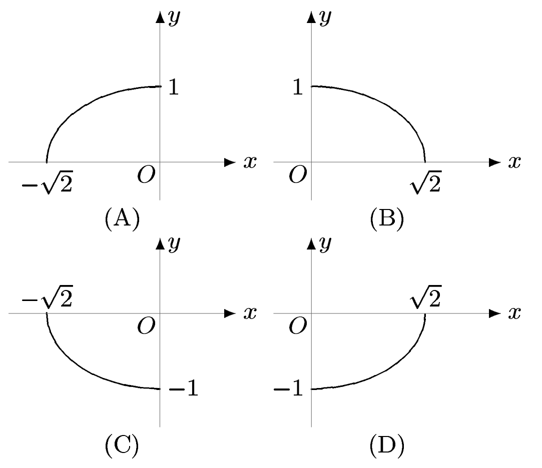
(A) 有一个$x\in\mathbf{R}$，使得$f(x)>g(x)$;

(B) 有无穷多个$x\in\mathbf{R}$，使得$f(x)>g(x)$;

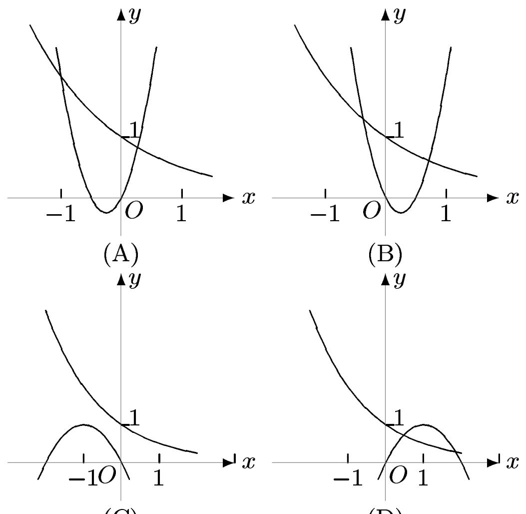
(C) 对$\mathbf{R}$中任意的x，都有$f(x)>g(x)+1$;

(D) $\mathbf{R}$中不存在x，使得$f(x)\leqslant g(x)$.

7. 若$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则椭圆$x^2+2y^2-2\sqrt{2}x\cdot\cos\theta+4y\sin\theta=0$的中心的轨迹是



8. 在下列图象中，二次函数$y=ax^2+bx$与指数函数$y=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x$的图象只可能是



(A) (B) (C) (D)

二、填空题(本大题满分40分)

9. 方程$\log_2(9^x-5)=\log_2(3^x-2)+2$的解是$x=$________.

10. 函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$的定义域是________.

11. 方程$\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}$在$[\pi,2\pi]$上的解是$x=$________.

12. 函数$y=x^{-2}\ (x<0)$的反函数是$y=$________.

13. 极坐标方程分别是$\rho=\cos\theta$和$\rho=\sin\theta$的两个圆的圆心距是________.

14. 在$(1+x)^6(1-x)^4$的展开式中, x^3的系数是________(结果用数值表示).

选择题: 考生可从下列两组(A_1组和B_1组)中选做一组试题, 其中A_1组适合非试点学校考生. B_1组适合试点学校考生.

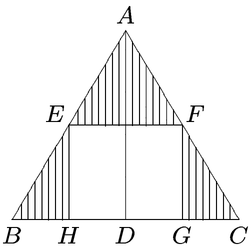
A_1

15. 已知$O(0,0)$和$A(6,3)$两点. 若点P在直线OA上, 且$\dfrac{OP}{PA}=\dfrac{1}{2}$, 又$P$是线段$OB$的中点, 则点$B$的坐标是________.

16. 平移坐标轴将抛物线$4x^2-8x+y+5=0$化为标准方程$x'^2=ay'\ (a\neq0)$, 则新坐标系的原点在原坐标系中的坐标是________.

17. 有8本互不相同的书, 其中数学书3本, 外文书2本, 其它书3本. 若将这些书排成一列放在书架上, 则数学书恰好排在一起, 外文书也恰好排在一起的排法共有________种(结果用数值表示).

18. 如图, 在正三角形ABC中, E、F依次是AB、AC的中点, $AD\perp BC$, $EH\perp BC$, $FG\perp BC$, D、H、G为垂足. 若将正三角形ABC绕AD旋转一周所得的圆锥的体积为V, 则其中由阴影部分所产生的旋转体的体积与V的比值是________.



B_1

15. 已知$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-8\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=-8\overrightarrow{i}+16\overrightarrow{j}$.

那么$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$________.

16. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=$ ______.

17. 有8本互不相同的书, 其中数学书3本, 外文书2本, 其它书3本. 若将这些数随机地排成一列放在书架上, 则数学书恰好排在一起, 外文书也恰好排在一起的概率为________(结果用分数表示).

18. 若i是虚数单位, 计算:
$\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^5}{16\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}=$________.

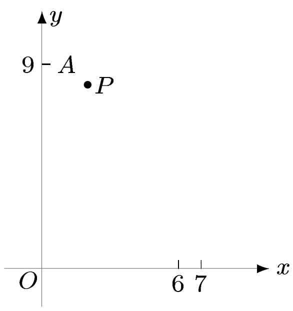
三、解答题(本大题满分86分)

19. (本题满分10分)

已知$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1}{6}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 求$\sin4\alpha$的值.

20. (本题满分10分)

在如图所示的直角坐标系中, 一运动物体经过点$A(0,9)$, 其轨迹方程为$y=ax^2+c\ (a<0)$, $D=(6,7)$为x轴上的给定区间.

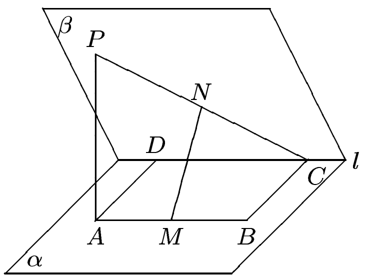


(1) 为使物体落在D内, 求a的取值范围;

(2) 若物体运动时又经过点$P(2,8.1)$, 问它能否落在D内? 并说明理由.

21. (本题满分14分)

如图, 在二面角$\alpha-l-\beta$中, A、$B\in\alpha$, C、$D\in l$, $ABCD$为矩形. $P\in\beta$, $PA\perp\alpha$, 且$PA=AD$. M、N依次是AB、PC的中点.



(1) 求二面角$\alpha-l-\beta$的大小;

(2) 求证: $MN\perp AB$;

(3) 求异面直线PA与MN所成角的大小.

选做题: 考生可从下列两组 (A_2组和B_2组) 中选做一组试题, 其中A_2组适合非试点学校考生, B_2组适合试点学校考生.

A_2

22. (本题满分16分)

设z是虚数, $\omega=z+\dfrac{1}{z}$是实数, 且$-1<\omega<2$.

(1) 求$|z|$的值及z的实部的取值范围;

(2) 设$u=\dfrac{1-z}{1+z}$. 求证: u为纯虚数;

(3) 求$\omega-u^2$的最小值.

B_2

22. (本题满分16分)

已知$A(-1,2)$为抛物线$C: y=2x^2$上的点. 直线l_1过点A, 且与抛物线C相切. 直线$l_2: x=a\ (a\neq-1)$交抛物线C于点B, 交直线l_1于点D.

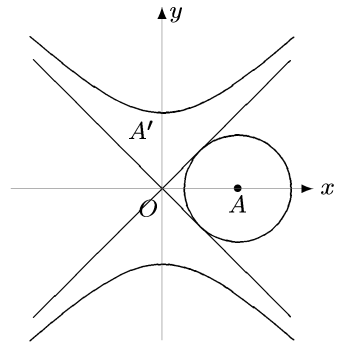
(1) 求直线l_1的方程;

(2) 设$\triangle ABD$的面积为S_1, 求$|BD|$及S_1的值;

(3) 设由抛物线C、直线l_1、l_2所围成的图形的面积为S_2, 求证: $S_1:S_2$的值为与a无关的常数.

23. (本题满分18分)

已知双曲线S的两条渐近线过坐标原点, 且与以点$A(\sqrt{2},0)$为圆心、l为半径的圆相切, 双曲线S的一个顶点A'与点A关于直线$y=x$对称. 设直线l过点A, 斜率为k.



(1) 求双曲线S的方程;

(2) 当$k=1$时, 在双曲线S的上支上求点B, 使其与直线l的距离为$\sqrt{2}$;

(3) 当$0\leqslant k<1$时, 若双曲线S的上支上有且只有一个点B到直线l的距离为$\sqrt{2}$, 求斜率k的值及相应的点B的坐标.

24. (本题满分18分)

设A_n为数列$\{a_n\}$前n项的和, $A_n=\dfrac{3}{2}(a_n-1)\ (n\in\mathrm{N})$. 数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=4n+3\ (n\in\mathrm{N})$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 若$d\in\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}\cap\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n,\cdots\}$, 则称$d$为数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的公共项. 将数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的公共项, 按它们在原数列中的先后顺序排成一个新的数列$\{d_n\}$, 证明数列$\{d_n\}$的通项公式为$d_n=3^{2n+1}\ (n\in\mathrm{N})$;

(3) 设数列$\{d_n\}$中的第n项是数列$\{b_n\}$中的第r项, B_r为数列$\{b_n\}$前r项的和, D_n为数列$\{d_n\}$前n项的和, $T_n = B_r - D_n$.

求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{(a_n)^4}$.

上海数学试题(理工农医类)答案要点

一、(第1题至第8题)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
代号	D	B	B	C	C	D	D	A

二、(第9题至第18题)

9. 1. 10. $\{x|1<x<2\}$ (或$(1,2)$).

11. $2\pi - 2\arcsin\dfrac{1}{3}$.

12. $y=-\sqrt{\dfrac{1}{x}}\ (x>0)$.

13. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

14. -8.

15. $A_1: (4,2)$. $B_1: -63$.

16. $A_1(1,-1)$. $B_1: -\dfrac{1}{4}$.

17. $A_1: 1440$. $B_1: \dfrac{1}{28}$.

18. $A_1: \dfrac{5}{8}$. $B_1: \dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ $\left(\text{或}\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)\right)$.

三、(第19题至第24题)

19. 由$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha=\dfrac{1}{6}$.

得$\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}$, 又$2\alpha\in(\pi,2\pi)$,

得$\sin 2\alpha=-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$.

故$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$

$=2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)\cdot\dfrac{1}{3}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

20. (1) 由点A的坐标为$(0,9)$, 得$c=9$, 即轨迹方程为$y=ax^2+9$. 令$y=0$, 得$ax^2+9=0$, $x^2=-\dfrac{9}{a}$.

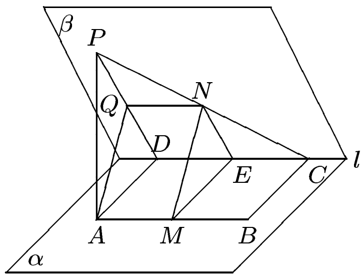
由题意$6<\sqrt{-\dfrac{9}{a}}<7$, 解得$-\dfrac{1}{4}<a<-\dfrac{9}{49}$.

(2) 若物体又经过点$P(2,8.1)$, 则$8.1=4a+9$, 解得$a=-\dfrac{9}{40}$.

$\because -\dfrac{1}{4}<-\dfrac{9}{40}<-\dfrac{9}{49}$,

$\therefore$ 物体能落在D内.

21. (1) 连接PD. $\because PA\perp\alpha$, $AD\perp l$,



$\therefore PD\perp l$.

$\therefore \angle PDA$是二面角$\alpha-l-\beta$的平面角.

在Rt$\triangle PAD$中, $\because PA=AD$,

$\therefore \angle PDA=45^\circ$,

即二面角$\alpha-l-\beta$的大小为45°.

(2) 设E是DC的中点, 连结ME、NE.

$\because M$、N、E依次是AB、PC、DC的中点,

$\therefore ME/\!/AD$, $NE/\!/PD$.

$\therefore ME\perp l$, $NE\perp l$.

因而$l\perp$平面MNE.

$\because AB/\!/l$, $\therefore AB\perp$平面MNE.

$\because MN\subset$平面MNE, $\therefore MN\perp AB$.

(3) 设Q是DP的中点, 连结NQ、AQ, 得$NQ/\!/DC$, 且$NQ=\dfrac{1}{2}DC$.

$\because AM/\!/DC$, 且$AM=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}DC$,

$\therefore QN/\!/AM$, $QN=AM$.

得$QNMA$为平行四边形. $\therefore AQ/\!/MN$.

于是$\angle PAQ$是异面直线PA与MN所成的角.

$\because \triangle PAD$为等腰直角三角形, AQ为斜边上的中线, $\therefore \angle PAQ = 45^\circ$, 即$PA$与$MN$所成角的大小为$45^\circ$

22. (A_2) (1) 设$z = a + bi$, a、$b \in \mathrm{R}$, $b \neq 0$.

$\omega = a + bi + \dfrac{1}{a+bi} = \left(a + \dfrac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(b - \dfrac{b}{a^2+b^2}\right)i$,

$\because \omega$是实数, $b \neq 0$. $\therefore a^2 + b^2 = 1$, 即$|z| = 1$.

$\omega = 2a$. $\because -1 < \omega < 2$. $\therefore z$的实部的取值范围是$\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

(2) $u = \dfrac{1-z}{1+z} = \dfrac{1-a-bi}{1+a+bi}$
$= \dfrac{(1-a-bi)(1+a-bi)}{(1+a+bi)(1+a-bi)}$
$= \dfrac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2} = -\dfrac{b}{a+1}i$,

$\because a \in \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $b \neq 0$, $\therefore u$为纯虚数.

(3) $\omega - u^2 = 2a + \dfrac{b^2}{(a+1)^2}$
$= 2a + \dfrac{1-a^2}{(a+1)^2}$
$= 2a - \dfrac{a-1}{a+1} = 2a - 1 + \dfrac{2}{a+1}$
$= 2\left[(a+1) + \dfrac{1}{(a+1)}\right] - 3$.

$\because a \in \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $\therefore a + 1 > 0$. $\therefore \omega - u^2 \geqslant 2 \times 2 - 3 = 1$.

当$a + 1 = \dfrac{1}{a+1}$, 即$a = 0$时, 上式取等号,

$\therefore \omega - u^2$的最小值是1.

22. (B_2) (1) 由$y = 2x^2$, 得$y' = 4x$. 当$x = -1$时, $y' = -4$.

$\therefore l_1$的方程为$y - 2 = -4(x+1)$, 即$4x + y + 2 = 0$.

(2) 由$y = 2x^2$及$x = a$, 解得点B的坐标为$(a, 2a^2)$.

由$4x + y + 2 = 0$及$x = a$, 解得点D的坐标为$(a, -4a-2)$.

又可求得点A到直线BD的距离为$|a+1|$, $|BD| = 2a^2 + 4a + 2 = 2(a+1)^2$.

$\therefore S_1 = |a+1|^3$.

(3) 由题意, 当$a > -1$时, $S_2 = \int_{-1}^{a}(2x^2 + 4x + 2)dx = \left(\dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{a}$
$= \dfrac{2}{3}a^3 + 2a^2 + 2a + \dfrac{2}{3} - 2 + 2 = \dfrac{2}{3}(a+1)^3$,

当$a < -1$时, $S_2 = \int_{a}^{-1}(2x^2+4x+2)dx = -\dfrac{2}{3}(a+1)^3$,

$\therefore S_1 : S_2 = \dfrac{3}{2}$. 即$S_1 : S_2$的值为与$a$无关的常数.

23. (1) 由已知得双曲线的渐近线为$y = \pm x$, 因而S为等轴双曲线. 因为其一个顶点为$A'(0, \sqrt{2})$,

所以双曲线S的方程为$\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = 1$.

(2) 若$B(x, \sqrt{x^2+2})$是双曲线S的上支上到直线$l: y = x - \sqrt{2}$的距离为$\sqrt{2}$的点, 则$\dfrac{|x - \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

解得$x = \sqrt{2}$, $y = 2$. $\therefore$点B的坐标是$(\sqrt{2}, 2)$.

(3) $\because$当$0 \leqslant k < 1$时, 双曲线S的上支在直线l的上方, $\therefore$点B在直线l的上方. 设直线l'与直线$l: y = k(x - \sqrt{2})$平行, 两线间的距离为$\sqrt{2}$, 且直线l'在直线l的上方. 双曲线S的上支上有且只有一个点B到直线l的距离为$\sqrt{2}$, 等价于直线l'与双曲线S的上支有且只有一个公共点.

设l'的方程是$y = kx + m$. 由l上的点A到l'的距离为$\sqrt{2}$可知:

$\dfrac{|\sqrt{2}k + m|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{2}$. 解得
$m = \sqrt{2}(\pm\sqrt{k^2+1} - k)$.

$\because$直线l'在直线l的上方,

$\therefore m = \sqrt{2}(\sqrt{k^2+1} - k)$.

由方程$y^2 - x^2 = 2$及$y = kx + m$, 消去y, 得

$(k^2-1)x^2+2mkx+m^2-2=0$.

$\because k^2\neq 1$, $\therefore \Delta=4(m^2-2+2k^2)=8k(3k-2\sqrt{k^2+1})$.

令$\Delta=0$, $\because 0\leqslant k<1$, 解得$k=0$, $k=\dfrac{2\sqrt5}{5}$.

当$k=0$时, $m=\sqrt2$, 解得$x=0$, $y=\sqrt2$,

$\therefore$ 点B的坐标是$(0,\sqrt2)$.

当$k=\dfrac{2\sqrt5}{5}$时, $m=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$, 解得$x=2\sqrt2$, $y=\sqrt{10}$,

$\therefore$ 点B的坐标是$(2\sqrt2,\sqrt{10})$.

24. (1) 由已知$A_n=\dfrac32(a_n-1)$ $(n\in\mathrm{N})$, 当$n=1$时, $a_1=\dfrac32(a_1-1)$, 解得$a_1=3$.

当$n\geqslant 2$时, $a_n=A_n-A_{n-1}=\dfrac32(a_n-a_{n-1})$, 由此解得$a_n=3a_{n-1}$, 即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=3$ $(n\geqslant 2)$, $\therefore$ 数列$\{a_n\}$是首项为3, 公比为3的等比数列,

故得: $a_n=3^n$ $(n\in\mathrm{N})$.

(2) 证法一: (i) 先证明形如3^{2n+1} $(n\in\mathrm{N})$的数为数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的公共项, 因而为数列$\{d_n\}$中的项.

$\because$ 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^n$,

$\therefore 3^{2n+1}\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.

$\because 3^{2n+1}=3\cdot 9^n=3(8+1)^n=3(8^n+C_n^1 8^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}8+1)$

$=3[8(8^{n-1}+C_n^1 8^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1})+1]$.

令$t=8^{n-1}+C_n^1 8^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}$, 则$t$正整数.

$\therefore 3^{2n+1}=3(8t+1)=4\cdot(6t)+3$.

$\therefore 3^{2n+1}\in\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$.

$\therefore 3^{2n+1}\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$.

(ii) 再证明数列$\{a_n\}$中除了形如3^{2n+1} $(n\in\mathrm{N})$的项外, 其它项都不是$\{b_n\}$中的项, 因而不是$\{d_n\}$中的项.

显然$a_1=3$不是$\{b_n\}$中的项.

$\because a_{2n}=3^{2n}=(8+1)^n=8t+1=4(2t)+1$ $(n,t\in\mathrm{N})$,

$\therefore a_{2n}$ $(n\in\mathrm{N})$不是$\{b_n\}$中的项, 因而不是$\{d_n\}$中的项.

由(i)与(ii), 数列$\{d_n\}$的通项公式是

$d_n=a_{2n+1}=3^{2n+1}$ $(n\in\mathrm{N})$

证法二: 由计算可知, a_1, a_2不是数列$\{b_n\}$中的项.

$\because a_3=27=4\times 6+3$,

$\therefore d_1=27$是数列$\{b_n\}$中的第6项.

设$a_k=3^k$是数列$\{b_n\}$中的第m项,

则$3^k=4m+3$ $(k,m\in\mathrm{N})$,

$\because a_{k+1}=3^{k+1}=3\cdot 3^k=3(4m+3)=4(3m+2)+1$.

$\therefore a_{k+1}$不是数列$\{b_n\}$中的项.

而$a_{k+2}=3^{k+2}=9\cdot 3^k=9(4m+3)=4(9m+6)+3$,

$\therefore a_{k+2}$是数列$\{b_n\}$中的项. 由以上讨论可知

$d_1=a_3$, $d_2=a_5$, $d_3=a_7$,

$\cdots$,

$d_n=a_{2n+1}$.

$\therefore$ 数列$\{d_n\}$的通项公式是$d_n=a_{2n+1}=3^{2n+1}$ $(n\in\mathrm{N})$.

(3) 由题意, $3^{2n+1}=4r+3$,

$\therefore r=\dfrac{3^{2n+1}-3}{4}=\dfrac34(3^{2n}-1)$.

易知$B_r=\dfrac{r(b_1+b_r)}{2}$

$=\dfrac{3(3^{2n}-1)(7+3^{2n+1})}{8}$,

$D_n=\dfrac{d_1(q^n-1)}{q-1}=\dfrac{27(3^{2n}-1)}{8}$,

$T_n=B_r-D_n=\dfrac{9\cdot 3^{4n}-15\cdot 3^{2n}+6}{8}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{(a_n)^4}=\dfrac98$.

对一道1996年上海市高中数学会考题图形的探讨

上海市培进中学　凌本信

1996年上海市普通高中数学会考第25题的图形似有问题,提出来与同行讨论.

原题是"已知射线: $x-y=0$ $(x \geqslant 0)$ 与抛物线: $x^2-2mx+y+m^2-1=0$ 有两个不同的交点 A, B. 当实数 m 变化时,

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 记线段 AB 的长为 L, 试建立 L 关于 m 的函数关系式 $L=f(m)$, 并求函数 $f(m)$ 的值域".

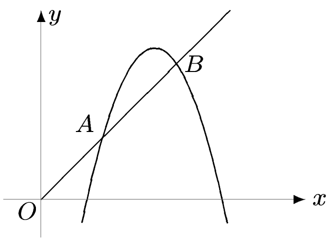


图1

原题的图形如图1所示. 笔者认为: 图1有两个问题: 第一当射线与抛物线有两个不同的交点时, 抛物线的顶点不可能在射线的上方; 第二图1中的抛物线开口太小, 失真太大(由射线的图象可知, 图1中 x, y 轴单位长度相等).

现在我们先来求 m 的取值范围. 设点 A、B 的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2). 把 $y=x$ 代入抛物线方程 $x^2-2mx+x+m^2-1=0$, 得到 $x^2-(2m-1)x+m^2-1=0$. 按题意有

$$\begin{cases} \Delta=(2m-1)^2-4(m^2-1)>0 \\ x_1+x_2=2m-1>0 \\ x_1x_2=m^2-1 \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{5}{4} \\ m>\dfrac{1}{2} \\ m \leqslant -1 \text{或} m \geqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow 1 \leqslant m<\frac{5}{4}.$$

即当射线与抛物线有两个不同的交点时, m 的取值范围是 $m \in \left[1, \dfrac{5}{4}\right)$.

我们再来求已知抛物线顶点的位置. 从抛物线方程: $x^2-2mx+y+m^2-1=0$, 即 $y=-(x-m)^2+1$ 可知, 抛物线的顶点 $(m,1)$ 在一条直线 $y=1$ 上. 当射线与抛物线有两个不同交点, 即 $1 \leqslant m<\dfrac{5}{4}$ 时, 抛物线顶点 $(m,1)$ 的纵坐标不大于它的横坐标. 由此可见, 这时抛物线的顶点 $(m,1)$ 不可能在射线 $y=x$ $(x \geqslant 0)$ 的上方.

最后我们来看已知抛物线的形状. 众所周知, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的形状是由 $|a|$ 确定的, 由于已知抛物线方程: $y=-x^2+2mx-m^2+1$ 的二次项系数是一个常数, 抛物线的形状就有该常数确定了. 当实数 m 变化时, 已知抛物线只是作平行于 x 轴(顶点沿着直线 $y=1$)的移动. 原题抛物线方程的二次项系数等于 -1, 所作图形显然开口太小, 失真太大.

实际上, 原题的大致图形应该如图2所示(这里取 $m=\dfrac{9}{8}$).

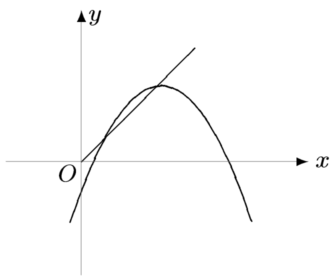
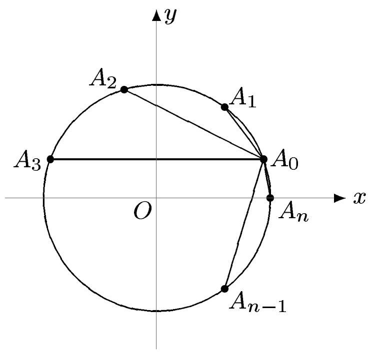


图2

数学问题与解答

1996年第4期问题解答

396. 一个工厂的n个$(n \geqslant 3)$自动化车间均匀地分布在半径为1公里的圆周上, 今要在此圆周上建一值班室, 问值班室建在何处, 才能使它到各车间的距离之和最小?



解: 建立直角坐标系如图所示, 记n个车间依次为A_1, A_2, $\cdots$, A_n. 不妨设值班室A_0建在$\overset{\frown}{A_1A_n}$上, $\angle A_0OA_n=\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{n})$, 则$A_0(\cos\theta,\sin\theta)$, $A_k\left(\cos\frac{2k\pi}{n},\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$ $(k=1,2,\cdots,n)$.$\because |A_0A_k|=$

$$\sqrt{\left(\cos\theta-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\theta-\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2}$$
$$=\sqrt{2-2\cos\left(\theta-\frac{2k\pi}{n}\right)}=2\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right),$$

其中$k=1,\ 2,\ \cdots,n$.

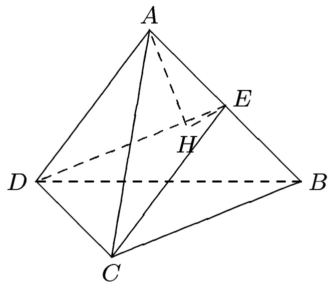
$$\therefore f(\theta)=|A_0A_1|+|A_0A_2|+\cdots+|A_0A_n|$$
$$=2\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

上式两边同乘以$\sin\frac{\pi}{2n}$, 右边各项积化和差, 整理得

$$\sin\frac{\pi}{2n}f(\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{2n+1}{2n}\pi-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}\right).$$

$\because 0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{n}$, $\therefore -\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2n}$, 当$\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}=\pm\frac{\pi}{2n}$时, 即$\theta=0$或$\theta=\frac{2\pi}{n}$时, $f_{\min}(\theta)=2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$. 故值班室建在任何一个车间都可以.

397. 在四面体$ABCD$中,P为各棱长之和, V为其体积,用$S_{(CD)}$表示过四面体棱CD及相对棱AB中点的截面(称为中线面)面积,其余中线面面积表示同此, 求证: $\frac{1}{S_{(CD)}}+\frac{1}{S_{(AB)}}+\frac{1}{S_{(BC)}}+\frac{1}{S_{(AD)}}+\frac{1}{S_{(BD)}}+\frac{1}{S_{(AC)}}\leqslant\frac{p}{3V}$. 等号当且仅当四面体$ABCD$为正四面体时成立.



证: 如图, 设E为AB中点, A在面DEC的射影为H, 连HE.

则由$V_{A-DEC}=V_{B-DEC}$得知

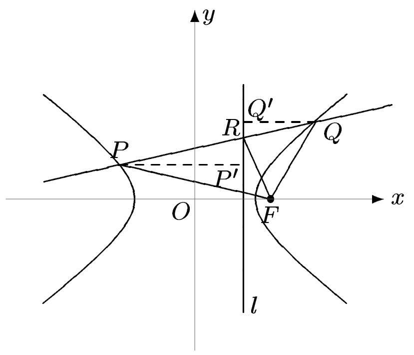
$$AH\cdot S_{(CD)}=\frac{3}{2}V.$$

在Rt$\triangle AHE$中, $AH\leqslant AE=\dfrac{AB}{2}$, 故

$$\frac{1}{S_{(CD)}}=\frac{2AH}{3V}\leqslant\frac{AB}{3V}.$$

同理可证$\dfrac{1}{S_{(BC)}}\leqslant\dfrac{AD}{3V}$, $\cdots$ 所以欲证的不等式成立, 当且仅当四面体$ABCD$为正四面体时取等号.

398. 双曲线$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$的右焦点为F, 右准线为l, 一直线交双曲线两支各为P、Q点, 交l于R点, 求证: FR平方$\angle PFQ$.



证: 过P、Q作l的垂线, 垂足为P'、Q'. 易见$\triangle PP'R\backsim\triangle QQ'R$, 所以有

$$\frac{|PP'|}{|QQ'|}=\frac{|PR|}{|QR|}.\qquad ①$$

又由双曲线定义知

$$\frac{|PF|}{|PP'|}=e=\frac{|QF|}{|QQ'|}.\qquad ②$$

由 ① 和 ② 得$\dfrac{|PF|}{|QF|}=\dfrac{|PR|}{|QR|}$, 故$FR$平分$\angle PFQ$.

399. 设a_1, a_2, $\cdots$, a_n为正数, 求证:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2-a_1a_2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2-a_2a_3}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2-a_{n-1}a_n}>\sqrt{a_1^2+a_n^2-a_1a_n}.$$

证: $\because$

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2-a_1a_2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2-a_2a_3}$$
$$=\sqrt{\left(a_1-\frac{1}{2}a_2\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2\right)^2}+\sqrt{\left(a_2-\frac{1}{2}a_3\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_3\right)^2}$$
$$=\left|\left(a_1-\frac{1}{2}a_2\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2\right)i\right|+\left|\left(a_2-\frac{1}{2}a_3\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_3\right)i\right|$$
$$=|a_1-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)a_2|+|a_2-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)a_3|$$
$$=|a_1-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)a_2|+|a_2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)-(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)a_3|$$
$$\geqslant|a_1-(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)a_3|$$
$$=\left|\left(a_1+\frac{1}{2}a_3\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}a_3i\right|$$
$$=\sqrt{\left(a_1+\frac{1}{2}a_3\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_3\right)^2}$$
$$=\sqrt{a_1^2+a_3^2+a_1a_3}>\sqrt{a_1^2+a_3^2-a_1a_3}.$$

进一步有

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2-a_1a_2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2-a_2a_3}+\sqrt{a_3^2+a_4^2-a_3a_4}>\sqrt{a_1^2+a_3^2-a_1a_3}+\sqrt{a_3^2+a_4^2-a_3a_4}>\sqrt{a_1^2+a_4^2-a_1a_4},$$
$$\cdots$$

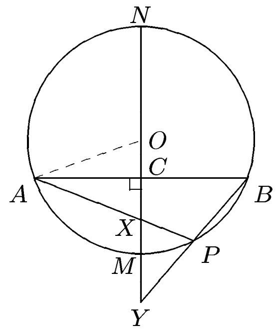
故原不等式成立.

400. 设AB为$\odot O$的非直径的弦, 其中点为C, 过C的直径交劣$\overset{\frown}{AB}$于M, 交优$\overset{\frown}{AB}$于N, 点P为劣$\overset{\frown}{AB}$上异于M的任一点, 直线AP、BP分别交直线MN于X和Y, 求证:

$$\sqrt{CX\cdot CY}<CM<\frac{1}{2}(CX+CY).$$

证: 如图, 连OA, 设$\angle PAB=\alpha$, $\angle PBA=\beta$, 则$\angle AOC=\alpha+\beta$. 设$OA=r$, $OC=d$, 则$AC=\sqrt{r^2-d^2}=BC$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{r^2-d^2}}{d}$.

又$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{CX}{AC}=\dfrac{CX}{\sqrt{r^2-d^2}}$,



$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{CY}{\sqrt{r^2-d^2}}$.

于是 $\dfrac{\sqrt{r^2-d^2}}{d}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$=\dfrac{\sqrt{r^2-d^2}(CX+CY)}{(r^2-d^2)-CX\cdot CY}$.

$\therefore (r^2-d^2)-CX\cdot CY$

$=d(CX+CY)$.

又 r^2-d^2

$=(r-d)^2+2d(r-d)$

$=CM^2+2d\cdot CM$,

$\therefore CM^2+2d\cdot CM-CX\cdot CY$

$=d(CX+CY)$,

$CM^2-CX\cdot CY$

$=d(CX+CY-2CM)$,

$(CM+\sqrt{CX\cdot CY})(CM-\sqrt{CX\cdot CY})$

$=2d\left[\dfrac{1}{2}(CX+CY)-CM\right]$.

于是 $CM-\sqrt{CX\cdot CY}$ 与 $\dfrac{1}{2}(CX+CY)-CM$ 同号或同时为零.

$\because CX\neq CY$, $\therefore \sqrt{CX\cdot CY}<\dfrac{1}{2}(CX+CY)$,

$(CM-\sqrt{CX\cdot CY})+\dfrac{1}{2}(CX+CY)-CM=\dfrac{1}{2}(CX+CY)-\sqrt{CX\cdot CY}>0$,

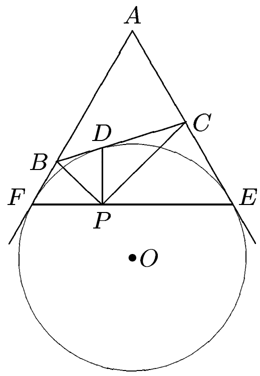
故 $CM-\sqrt{CX\cdot CY}>0$, $\dfrac{1}{2}(CX+CY)-CM>0$, 本题结论成立.

1996年第5期问题

401. 现要挂号邮寄120本书, 每11本重2千克. 邮局规定(为方便计, 略有改动): 印刷品的邮费为每千克0.8元, 不足1千克的以1千克计, 每件限重5千克. 挂号费每件0.6元(含手续费0.3元). 试问如何打包邮寄邮费最省?

(上海　倪　明供题)

402. $\triangle ABC$ 的边 BC 外的旁切圆 O 分别切 BC、CA、AB 或其延长线于 D、E、F, $PD\perp EF$ 于 P. 求证: PD 平分 $\angle BPC$.



(四川　宿晓阳供题)

403. 求函数 $f(\theta)=\sin^4\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^4\theta\quad\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值.

(江苏　陈炳堂供题)

404. 设 x、y、z 均为正数, 求证:

$$\frac{y(y^2-x^2)}{z+x}+\frac{z(z^2-y^2)}{x+y}+\frac{x(x^2-z^2)}{y+z}\geqslant 0.$$

(湖南　陈友才供题)

405. 设 $a_i\in R^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $n\geqslant 2$, 求证:

$$\frac{a_1^3}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^3}{a_3+a_4+\cdots+a_n+a_1}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\geqslant\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n-1}.$$

(湖北　洪凰翔供题)

(本栏目责任编辑　李大元　赵小平　汪纯中)

编后漫笔

三个和尚···

张奠宙

七月在杭州, 一位老师告诉我以下一个真实的小故事. 有一天,政治课教师和数学课教师在办公室谈话:

政: "三个和尚究竟有几担水可吃?"

数: "当然是三担水."

政: "为什么?"

数: "因为我们假定这三个和尚都会尽心尽职完成每人挑一担水的任务."

政: "这岂不是形而上学? 三个和尚可能没水吃!"

数: "形而上学有什么不好? 在外部条件明确的情况下, 就得用形而上学的逻辑推理."

政: "是的. 辩证法是认识和分析客观事物的方法, 形而上学的推理也是认识事物的一种方法, 关键是看在什么条件下使用."

这段话说明, 数学课并非天天在讲辩证法. 相反, 多数时间在讲形而上学的逻辑分析方法. 我们对学生进行辩证唯物主义教育, 不只是在某些概念上做文章. 例如, 讲函数时要联系"事物的运动"等. 其实, 更重要的教育是把条件分析清楚, 说明在什么条件下, 可以用数学的逻辑推理, 某些条件下就不能用数学方法去分析.数学课讲了那么多的形而上学, 注意避免形而上学当然就是进行德育教育的重要组成部分了. 三个和尚有几担水吃, 数学课上怎么讲呢? 值得研究.

~~~~~~

(上接第5–7页)

将时间留给学生, 又要用时间去"收", 即归纳、整理学生们发现的结果, 这可能会挤掉学生通过解基本题, 形成解题规范的时间, 这也正是在当前教学中没必要也不可能全部采用开放型设计的一个原因.

3. 引用开放型设计, 能使学生在解答问题中逐步形成独立思考, 主动探索的学习品质, 不限于得到一种答案的, 能通过解答问题, 再提出问题. 观察, 联想力都有提高.

4. 当前的素质教育要求教学中能体现"学科德育", 强调教学的"轻负担, 高质量", 要真正实现这一要求, 需要对原有的教学观念, 教学形式进行反省, 针对其弱点引入新的教学观念及教学形式, 因此, 对开放型设计的研究是有现实意义的.

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

1996年第5期

(总第146期)

主　　编: 张奠宙

常务副主编: 邹一心

广告许可证: 沪工商广字 07017号

主办单位: 华东师范大学数学系

出　　版: 华东师范大学出版社

邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)

印　　刷: 江苏宜兴市第二印刷厂

国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局

国内订阅: 全国各邮电局

定价: 2.80元　国内统一刊号: CN31–1024　逢双月22日出版　代号: 4–357
~~~~~~