

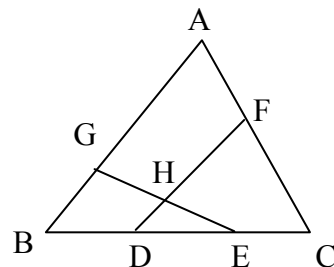
注意：(1)填充題答案必須按題號填入答案卷第 2 頁的空格內，否則不予計分。

(2)計算證明題請自行標明題號，由答案卷的第 1 頁寫起，剩餘紙張可當填充題的計算紙。

第一部分：填充題(每題 4 分，共 28 分)

1. 一隻青蛙在 $ABCDE$ 五點上跳動，每次落點異於跳點，假設從 A 出發，跳 n 次後仍回到 A 之跳法有 a_n 種，若 $a_n = ka_{n-1} + ma_{n-2}$ ($n \geq 3$)， k, m 為常數，求數對 $(k, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。A：(3, 4)
2. 設 $a, b, c \in R$ ， $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，若 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 3$ 且 $y = f(x)$ 無極值時，求 a 值範圍為何？
A： $0 \leq a \leq 6$
3. 有一地球儀，其赤道長為 150 公分，若 A 地位於赤道上東經 10° ， B 地位於北緯 45° ，東經 145° ，求 AB 兩地之球面最短距離為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公分。A：50
4. 設 $A(1, 1, 2)$ ， $B(-2, 1, 5)$ ， $C(3, 1, 2)$ ， $D(2, -1, 1)$ 為空間中四點。若 P 為直線 \overline{CD} 上的動點，則當 P 坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 時， $\triangle PAB$ 的面積最小。A：(8/3, 1/3, 5/3)
5. 將 12 張相同椅子排成一列，甲乙丙丁戊己庚七人分成三組入座，三組人數各為 1 人、3 人、3 人，則同組相鄰，不同組不相鄰之坐法有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種。A：302400

6. 如右圖之 $\triangle ABC$ 中，點 G 在 \overline{AB} 上， $\overline{AG} : \overline{GB} = 2 : 1$ ，點 F 在 \overline{AC} 上， $\overline{AF} : \overline{FC} = 1 : 2$ ，點 D 、點 E 在 \overline{BC} 上， $\overline{BD} : \overline{DE} : \overline{EC} = 1 : 1 : 1$ ，又 \overline{GE} 與 \overline{DF} 交於 H 點，求 $\overline{DH} : \overline{HF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。A：1 : 3

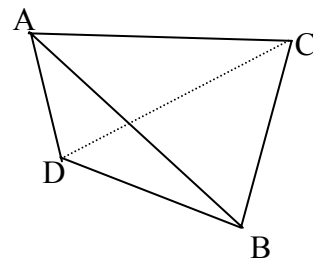


7. $x, y, z \in R$ ，若 $\begin{cases} x+y+z = -3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{3} \\ x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -24 \end{cases}$ ，求 $x^3 + y^3 + z^3$ 之值 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。A：-27

第二部分：填充題(每題 7 分，共 49 分)

8. 如圖，A-BCD 為空間中的三角錐，已知其稜長

$\overline{AC} = \overline{BD} = 10$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 17$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = 3\sqrt{29}$ ，求三角錐 A-BCD 的體積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。A：240



9. 從 2700 的正因數中任取 a, b, c 三個，使得 a 是 b 的因數， b 是 c 的因數的機率 = _____。

A : 125/2916

10. 給定雙曲線 $\Gamma : \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{20} = 1$ 與直線 $L : 3x + 4y = k$ ，若在直線 L 上存在唯一的點 P ，使過 P 點對雙曲線

線可作二條互相垂直之切線，則 P 點座標 = _____。 A : $(\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$ 或 $(\frac{-12}{5}, \frac{-16}{5})$

11. $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 1, \overline{BC} = \sqrt{3}, \overline{AC} = 1$ ，設 P 為其內部一點且 P 點到三邊 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 之距離 $\overline{PD},$

$\overline{PE}, \overline{PF}$ 比為 $1 : 2 : 3$ ，若 $\overline{AP}^2 : \overline{BP}^2 : \overline{CP}^2 = 1 : a : b$ ，求數對 $(a, b) =$ _____。

A : $(\frac{30+9\sqrt{3}}{7}, \frac{15+6\sqrt{3}}{7})$

12. 若 $x > 0$ ，則 $\sqrt{2x^2 - 4x + 4} + \sqrt{2x^2 - 16x + (\log_2 x)^2 - 2x \log_2 x + 2 \log_2 x + 50}$ 的最小值為 _____。 A : 7

13. 求定積分 $\int_0^{\pi} \ln(\sin x) dx$ 之值 = _____。(此處 $\ln(x)$ 表自然對數) A : $-\pi \ln 2$

14. 求 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{900}}$ 的整數部分 = _____。 A : 58

第三部分：計算證明題(共 23 分，請自行標明題號，由答案卷的第 1 頁寫起，並詳列過程)

15. (1) 求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 之固有值？(eigenvalue) (3 分) A : $-2, 2, 3$

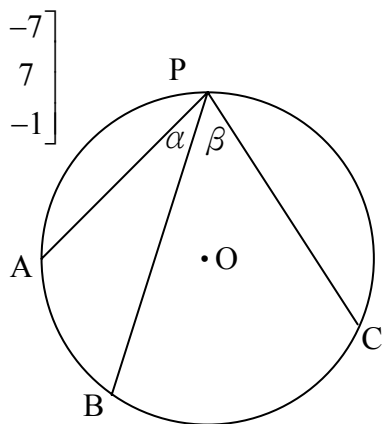
(2) 將矩陣 A 對角化，並利用此對角矩陣求 A^3 ？(5 分) A : $\begin{bmatrix} 1 & -19 & -7 \\ 7 & 27 & 7 \\ -9 & 19 & -1 \end{bmatrix}$

16. 如圖，已知 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ 是圓 O 的三條弦， $\angle APB = \alpha, \angle BPC = \beta$,

試證： $\overline{PB} \cdot \sin(\alpha + \beta) = \overline{PC} \cdot \sin \alpha + \overline{PA} \cdot \sin \beta$ (7 分)

17. 設正整數 a, b, c, n 滿足 $2^n = a! + b! + c!$ ，若 $a \geq b \geq c$ ，試求序對 (a, b, c, n) ？(8 分)

A : $(2, 1, 1, 2), (3, 1, 1, 3), (4, 3, 2, 5), (5, 3, 2, 7)$



國立臺中第一高級中學 99 學年度第 1 次教師甄選

數學科答案卷 第 2 頁

總分：_____

第一部分：填充題(每題 4 分，共 28 分) 初閱：_____，複閱：_____。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
(3, 4)	$0 \leq a \leq 6$	50	(8/3, 1/3, 5/3)	302400	1 : 3	-27

第二部分：填充題(每題 7 分，共 49 分) 初閱：_____，複閱：_____。

(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
240	125/2916	$(\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$ 或 $(\frac{-12}{5}, \frac{-16}{5})$	$(\frac{30+9\sqrt{3}}{7}, \frac{15+6\sqrt{3}}{7})$	7	$-\pi \ln 2$	58

第三部分：計算證明題(共 23 分) 初閱：_____，複閱：_____。

【計算證明題請自行標明題號，由答案卷的第 1 頁寫起，剩餘紙張可當填充題的計算紙。】