# 臺北市立松山高級工農職業學校

## 103 學年度第 2 次正式教師甄選【數學科】初試試題

### 一、 填充題:每題 5 分，共 80 分

1. 設 $x$，$y \in R$ 且 $x+3y-1=0$，$f(x, y)=3^x+27^y$，則 $f(x, y)$ 有最小值為_____(1)_____ .

2. 若 $0° < \alpha < 90°$，若 $x^2+kx+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$ 之二根為 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，則 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=$____(2)_____ .

3. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，$\angle A$ 之外角平分線分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 $D$ 求 $\overline{AD}=$_____(3)_____ .

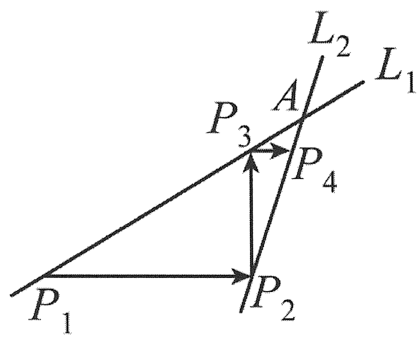
4. 設 $A$，$B$ 均為三位正整數，且 $B>100$，若 $\log B$ 之尾數為 $\log A$ 之尾數之3倍，則 $A+B$ 之值=_____(4)_____.

5. 設 $1+(1+x)+(1+x)^2+\ldots+(1+x)^n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，若 $a_5=a_4+a_3$，則 $n=$____(5)____.

6. $G$ 為 $\Delta ABC$ 重心，過 $G$ 之一直線 $L$ 交 $\overline{AB}$ 於 $P$，交 $\overline{AC}$ 於 $Q$，若 $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AC}$（其中 $r$，$s$ 皆為大於0的實數），則 $9r+4s$ 的最小值為_____(6)_____ .

7. 在複數平面上，以方程式 $z^5-z^4+z^3-z^2+z-1=0$ 的五個根為頂點的多邊形，其面積為____(7)_____ .

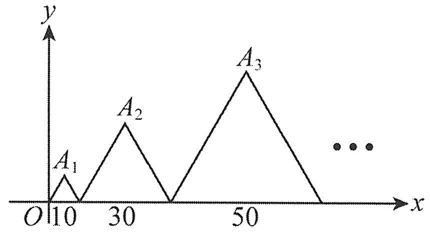
8. 如右圖，兩直線 $L_1: x-3y=k_1$，$L_2: 2x-y=k_2$ 交於 $A$ 點，從 $L_1$ 上一點 $P_1$ 向右走60個單位到 $L_2$ 上的 $P_2$ 點，再從 $P_2$ 向上走到 $L_1$ 上的 $P_3$ 點，再從 $P_3$ 向右走到 $L_2$ 上的 $P_4$ 點，依此規則持續走下去，在 $L_1$ 上得 $P_1$，$P_3$，$P_5$，…，在 $L_2$ 上得 $P_2$，$P_4$，$P_6$，…，則 $\sum_{k=1}^{\infty}\overline{P_kP_{k+1}}=$____(8)_____ .




9. 甲、乙二人猜拳六次，以勝之次數多者為勝者，求甲為勝者之機率為____(9)_____ .

10. 台北市政府調查通勤上班族每月使用交通工具（只有捷運、開車、騎機車三種）的狀況如下：
原來搭捷運者有70%會繼續搭捷運，有10%改為開車，有20%改為騎機車；
原來開車者有20%會改搭捷運，有50%繼續開車，有30%改為騎機車；
原來騎機車者有10%改搭捷運，90%繼續騎機車．長期而言，騎機車者占通勤上班族多少比例？
____(10)_____ .

11. 阿信注意到有一排正三角形木架，每一個上方頂點各有一個照明燈$A_1$，$A_2$，$A_3$，…等，這些燈似乎連綴成一條曲線，如下圖．阿信發現這些三角架的邊長依次為10，30，50，…等而成一等差數列．他斷定這些燈是在同一條拋物線上，且頂點在圖中之$x$軸上，試求此拋物線方程式為____(11)_____．




12. 試求 $\sum_{k=2}^{100}[\frac{k^4}{k^2-1}]=$ _____(12)_____．　（註：[　]為高斯符號）

13. 設$n$為一自然數，$\langle a_n \rangle$ 為一數列且$a_1=1$，試決定 $a_n$ 使得定義在$0<x\le 1$的函數

$$f(x)=\begin{cases} a_1x, & \frac{1}{2}<x\le 1 \\ a_2x^2, & \frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots \\ a_nx^n, & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

是連續函數，則$a_n=$________(13)________.

14. 設$P$為橢圓$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一點，$F_1,F_2$為二焦點，若$\angle F_1PF_2=60°$，則$\Delta PF_1F_2$的面積為____(14)____．

15. 設二次多項式 $f(x)$ 滿足 $5f'(1)=2f(2)$ 及 $\int_0^1 f(x)dx=0$，若 $f(x)=0$ 的兩根為 $\alpha$，$\beta$，而 $\alpha<\beta$，則數對 $(\alpha,\ \beta)=$ _____(15)_____．

16. 求 $\int_{-3}^{3}|\frac{2}{3}x+2-\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}\,|\,dx=$ _____(16)_____．

## 二、計算題: 每題10分，共20分

1. 設 $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -3 & -1\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}$，求(1)矩 $P^{-1}AP$ 之矩陣．　(2) $A^{30}$ 之矩陣．

2. 松松公司對 10 名新進員工實施職前訓練，並記錄其接受訓練前後測驗成績的變化如下表所示，請回答下列問題：

| 員工 | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* | *I* | *J* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 訓練前成績 | 75 | 60 | 65 | 65 | 60 | 65 | 55 | 60 | 65 | 80 |
| 訓練後成績 | 100 | 90 | 90 | 80 | 70 | 70 | 60 | 60 | 80 | 100 |

(1)試求出訓練前成績與訓練後成績的相關係數．

(2)若松松公司再增聘 1 名員工，已知其訓練前成績為 50 分，請預估其訓練後的成績為何？

# 臺北市立松山高級工農職業學校

## 103 學年度第 2 次正式教師甄選【數學科】初試試題答案卷

一、 填充題:每題 5 分，共 80 分

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\sqrt{3}$ | $\frac{1+3\sqrt{3}}{8}$ | 24 | 1000 | 13 | $\frac{25}{3}$ | $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ | 96 |
| **(9)** | **(10)** | **(11)** | **(12)** | **(13)** | **(14)** | **(15)** | **(16)** |
| $\frac{98}{243}$ | $\frac{13}{19}$ | $y^2=30x-75$ | 338448 | $n!$ | $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ | $(\frac{1}{3}，1)$ | 6 |

二、 計算題: 每題 10 分，共 20 分

1. (1) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix}-2+3\cdot2^{30} & -2+2^{31}\\3-3\cdot2^{30} & 3-2^{31}\end{bmatrix}$

(1) $P^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}2 & 1\\-3 & -1\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}$， $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\-3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\-3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$.

(2) $(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1^2 & 0\\0 & 2^2\end{bmatrix}$，即 $P^{-1}A^2P=\begin{bmatrix}1^2 & 0\\0 & 2^2\end{bmatrix}$ . 同理可推得 $P^{-1}A^{30}P=\begin{bmatrix}1^{30} & 0\\0 & 2^{30}\end{bmatrix}$（可利用數學歸納法證明之），

$A^{30}=P(P^{-1}A^{30}P)P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{30} & 0\\0 & 2^{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2^{30}\\-3 & -2^{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+3\cdot2^{30} & -2+2^{31}\\3-3\cdot2^{30} & 3-2^{31}\end{bmatrix}$ .

2. (1) 0.8; (2)56 分

(1) $\mu_X=65$，$\mu_Y=80$，$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)=800$，$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_X)^2=500$，$\sum_{i=1}^{10}(y_i-\mu_Y)^2=2000$，

$$\therefore r(X,\ Y)=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_X)^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\mu_Y)^2}}=\frac{800}{1000}=0.8 .$$

(2) $y=a+bx$， $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_X)^2}=\dfrac{8}{5}$

$\Rightarrow y=a+\frac{8}{5}x$，將(65，80)代入左式 $\Rightarrow a=-24 \Rightarrow y=-24+\frac{8}{5}x$ .

$y=-24+\frac{8}{5}\times50=56$，$\therefore$所求為 56 分 .